LA REGLA DE ORO DE LA ACUMULACION Y LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCION UNITARIA EN MODELOS BISECTORIALES *

Andreu Mas Colell

Universidad de California,
Berkeley

* El autor desea expresar su agradecimiento a Antonio Bosch y Joaquim Silvestre por sus útiles observaciones. La investigación para esta memoria fue llevada a cabo durante el curso académico 1970-71 en la Universidad de Minnesota y fue financiada por una beca de la Fundación «Juan March».

El objeto del presente trabajo es dar cuenta de algunos resultados referentes a problemas simples de optimización en teoría del crecimiento.

En pocas palabras, se trata de lo siguiente: tómese un modelo de crecimiento bisectorial neoclásico como el estudiado por H. Uzawa (7) y limitémonos a la comparación del consumo per cápita entre estados de crecimiento sostenido. Con la hipótesis de competencia perfecta, si la tasa de ahorro está dada, el modelo queda completamente determinado y no hay problema de optimización alguno. Si es variable, entonces el consumo per cápita máximo corresponde al estado de crecimiento sostenido que satisface la llamada regla de oro de la acumulación (estos términos se definirán más adelante). Supóngase ahora que la tasa de ahorro está dada, pero que la distribución del stock de capital entre los dos sectores es controlable (en el espíritu, por ejemplo, de la familia de modelos que se remiten al de Mahalanobis); ¿cuáles son las características del estado de crecimiento sostenido que maximiza el consumo per cápita? Se demuestran dos resultados: el primero (que es muy simple) que si las funciones de producción de ambos sectores son Cobb-Douglas, la regla de oro (que no así la eficiencia productiva) continúa caracterizando el óptimo; el segundo (que es una especie de recíproco del primero y es bastante menos obvio) que, en general, si la regla de oro caracteriza el óptimo, entonces la función de producción del sector de bienes de inversión tiene, al menos localmente, la forma de una Cobb-Douglas.

Los resultados de por sí no llegan muy lejos, pero son sugestivos. En la literatura sobre el modelo de dos sectores la elasticidad de sustitución es un concepto central en las investigaciones sobre estabilidad, pero resulta sorprendente, al menos para nosotros, que juegue un papel importante en el problema de optimización mencionado más arriba. Pudiera bien ser que algo más fundamental se escondiese detrás de estas «paradojas». Quizá sea simplemente que nuestra manera de tratar el problema produce una imagen distorsionada de algo mucho más simple. En todo caso, la intuición no parece ser de mucha ayuda.

En la primera sección se describe el modelo de dos sectores. En la segunda se plantea el problema y se enuncian los resultados principales. Estos se demuestran en la tercera. La cuarta, un tanto al margen del tema principal del artículo, deriva las condiciones necesarias que una trayectoria óptima satisface para el caso de las funciones de producción Cobb-Douglas.

I

En esta sección se describirá el modelo bisectorial de que nos ocuparemos. Corresponde al de H. Uzawa (7). Todo lo que se incluye aquí es bien conocido [véase E. Burmeister y A. Dobell (1), capítulos 4 y 5].

Existen dos factores de producción homogéneos: capital y trabajo (o, más precisamente, servicios del capital por día y servicios del trabajo por día). Supondremos, por simplicidad, que el stock de capital no sufre depreciación alguna y que el número de jornadas de trabajo disponible es igual a la población.

Los factores de producción pueden emplearse, alternativamente, en un sector de bienes de consumo (sector 1), o en uno de bienes de inversión (sector 2). En el primero se produce un bien de consumo no almacenable, en el segundo el bien de capital. Los factores pueden transferirse de un sector a otro instantáneamente y sin incurrir en coste alguno. Las posibilidades técnicas en cada sector vendrán expresadas por funciones de producción neoclásicas.

Formalmente, desígnese por X_i, K_i, L_i la producción, empleo de capital y empleo de trabajo (respectivamente) en el sector i, $i = 1,2$. Estas magnitudes se relacionan a través de las funciones de producción F_i, $i = 1,2$; es decir, $X_i = F_i(K_i, L_i)$, $i = 1,2$.

Las dos hipótesis siguientes incorporan los supuestos de rendimientos constantes a escala y de productividades marginales decrecientes.

— *Hipótesis 1:* F_i está definida para todo $L_i, K_i > 0$; es doblemente (continuamente) diferenciable y es homogénea de primer grado, es decir, para todo $\lambda > 0$, $L_i > 0$, $K_i > 0$, se tiene:

$$F_i(\lambda K_i, \lambda L_i) = \lambda F_i(K_i, L_i); \quad i = 1,2.$$

— *Hipótesis 2:* Para todo $\bar{K}_i > 0$, $\bar{L}_i > 0$ se tiene:

$$\left.\frac{\partial F_i}{\partial L_i}\right|_{\bar{K}_i, \bar{L}_i} > 0, \qquad \left.\frac{\partial F_i}{\partial K_i}\right|_{\bar{K}_i, \bar{L}_i} > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_i}{\partial L_i^2}\right|_{\bar{K}_i,\, \bar{L}_i} < 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 F_i}{\partial K_i^2}\right|_{\bar{K}_i,\, \bar{L}_i} < 0 \quad ; \quad i=1,2.$$

Supondremos que la población crece a un ritmo constante, es decir:

— *Hipótesis 3:* Hay una constante $n > 0$ tal que en todo instante temporal t si $L(t)$ designa la población en este momento se tiene:

$$\dot{L}(t) = n\, L(t) \quad \left(\text{donde } \dot{L}(t) = \frac{d\, L(t)}{d\, t}\right).$$

Un *estado* de la economía es una asignación de factores a los sectores, es decir, una colección de valores (positivos) específicos para (K_1, K_2, L_1, L_2).

Dada la cantidad total de capital y trabajo K, L un estado (K_1, K_2, L_1, L_2) es realizable si $K_1 + K_2 \leq K$ y $L_1 + L_2 \leq L$.

Un estado (K_1, K_2, L_1, L_2) es *balanceado (steady state)* si:

$$n\,(K_1+K_2)=F_2\,(K_2, L_2)\,. \qquad [1]$$

La denominación se justifica porque, como se ve inmediatamente, si ese es un estado inicial de la economía, entonces es factible seguir una trayectoria de crecimiento balanceada y de pleno empleo, es decir, una trayectoria donde todas las variables $K_1(t), K_2(t), L_1(t), L_2(t), X_1(t), X_2(t)$, crecen uniformemente al ritmo n (y, por lo tanto, las magnitudes relativas permanecen constantes) y todo el capital y trabajo disponibles están empleados.

A lo largo de una trayectoria como la descrita en el párrafo anterior (y que podríamos llamar balanceada) el consumo per cápita

$$\frac{X_1(t)}{L(t)}$$

permanece constante, y es, por supuesto, igual al del estado balanceado inicial. Tiene un interés claro, por lo tanto, investigar las características de los estados balanceados para los que ese consumo per cápita es máximo (si es que existen).

Advertiremos primero que, en virtud de la hipótesis 1, si (K_1, K_2, L_1, L_2) es un estado que maximiza el consumo per cápita (y que llamaremos óptimo), también lo es $(\lambda K_1, \lambda K_2, \lambda L_1, \lambda L_2)$ para todo $\lambda > 0$. Así, será suficiente considerar estados normalizados, por ejemplo, los que satisfagan:

$$L_1+L_2=1\,. \qquad [2]$$

A continuación se verá que a lo sumo existe un estado normalizado óptimo. De hecho, puede afirmarse un enunciado más fuerte: existe a lo sumo un estado balanceado que maximice localmente (no ya glogalmente) el consumo per cápita. Supóngase, en efecto, que hubiese dos: $(K'_1\ K'_2, L'_1, L'_2)$ y $(K''_1, K''_2, L''_1, L''_2)$. Sea: $(K^\alpha_1, K^\alpha_2, L^\alpha_1, L^\alpha_2) = \alpha(K'_1, K'_2, L'_1, L'_2)+(1-\alpha)(K''_1, K''_2\ L''_1, L''_2)$, para $0<\alpha<1$. Entonces: $(K^\alpha_1, K^\alpha_2, L^\alpha_1, L^\alpha_2)$ satisface [2] y por la hipótesis 2 (que es una hipótesis de convexidad estricta sobre las isocuantas) y el supuesto de normalización se sigue: $F_1(K^\alpha_1, L^\alpha_1) >$ mínimo $\{F_1(K'_1, L'_1), F_1(K''_2, L''_2)\}$ y $F_2(K^\alpha_2, L^\alpha_2) \geq n(K^\alpha_1+K^\alpha_2)$. Puesto que α es arbitrario, se tiene por un argumento de continuidad simple que si $F_1(K'_1, L'_1) \leq F_1(K''_1, L''_1)$ existe un estado balanceado arbitrariamente cercano a (K'_1, K'_2, L'_1, L'_2) con un consumo per cápita mayor que $F_1(K'_1, L'_1)$, lo cual es una contradicción. Lo mismo vale si $F_1(K''_1, L''_1) \leq F_1(K'_1, L'_1)$.

Nuestro problema es el siguiente:

$$\text{Maximizar } \frac{1}{L_1+L_2} F_1(K_1, L_1)$$

$$\text{sujeto a } F_2(K_2, L_2) = n(K_1+K_2).$$

La expresión de Lagrange correspondiente es:

$$\frac{1}{L_1+L_2} F_1(K_1, L_1) + \lambda\left[F_2(K_2, L_2) - n(K_1+K_2)\right].$$

Igualando las derivadas parciales a cero se obtiene:

$$\text{i)} \quad (L_1+L_2)\frac{\partial F_1}{\partial L_1} - F_1(K_1, L_1) = 0,$$

$$\text{ii)} \quad -\frac{1}{(L_1+L_2)^2} F_1(K_1, L_1) + \lambda\frac{\partial F_2}{\partial L_2} = 0,$$

$$\text{iii)} \quad \frac{1}{L_1+L_2}\frac{\partial F_1}{\partial K_1} - n\lambda = 0,$$

$$\text{iv)} \quad \frac{\partial F_2}{\partial K_2} - n = 0,$$

$$\text{v)} \quad F_2(K_2, L_2) - n(K_1+K_2) = 0.$$

Manipulando brevemente, i) - v) pueden resumirse en:

$$\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial K_1}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial L_1}}=\frac{\dfrac{\partial F_2}{\partial K_2}}{\dfrac{\partial F_2}{\partial L_2}}, \qquad [3]$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial K_2}=n . \qquad [4]$$

[3] y [4] nos dan las condiciones necesarias para un máximo local. Es fácil deducir de las condiciones de segundo orden (y las hipótesis 1 y 2) que son asimismo suficientes. Se sigue, por lo tanto, de las consideraciones hechas más arriba que el sistema [1], [3] y [4] tiene a lo sumo una solución. Hasta aquí nada impide que no la tenga, pero es fácil formular hipótesis naturales sobre el comportamiento de las funciones de producción en la frontera de su dominio de definición que impliquen la existencia de una solución (las llamadas condiciones de Inada, por ejemplo). Será, sin embargo, más práctico suponer sin más:

— *Hipótesis 4:* El sistema [1], [3], [4] tiene una solución.

La ecuación [3] expresa la igualdad entre los dos sectores de las relaciones marginales de transformación de los factores. Es, por lo tanto, la condición de eficiencia productiva (estática). Un estado de la economía se dirá *eficiente* si cumple esta condición. La ecuación [6] es la llamada *regla de oro de la acumulación (golden rule)*. En un marco competitivo (véase la próxima sección) expresa que el tipo de beneficio debe ser igual al tipo de crecimiento de la población.

Resumiendo: *El estado balanceado de la economía que es eficiente y satisface la regla de oro de la acumulación tiene un consumo per cápita mayor que el de cualquier otro estado balanceado.*

La regla de oro de la acumulación es importante porque, bajo la forma de una norma de eficiencia, da una respuesta simple e inteligible al problema de optimización más elemental (en la teoría del crecimiento) y también porque ha resultado ser instrumental en la resolución de problemas de optimización más complejos (véase la última sección).

Fue descubierta (casi debería decirse advertida) a principios de los años sesenta por varios autores independientemente [J. Robinson, E. Phelps, J. Desrousseaux, C. v. Weizsäcker, etc.; véase E. Phelps (5)]. Su validez es muy general; no está, ni mucho menos, limitada a modelos bisectoriales neoclásicos. Es cierta en modelos neoclásicos con un número arbitrario de bienes de capital (y un solo bien de consumo), y también, adecuadamente formulada, en modelos lineales.

Supóngase ahora que la función de producción del sector de bienes de inversión se caracteriza por tener, para cualquier combinación de factores, una elasticidad de sustitución unitaria, es decir, por ser del tipo Cobb-Douglas [1]:

$$X_2 = L_2^{\beta} K_2^{1-\beta} \quad ; \quad 0 < \beta < 1.$$

Entonces la regla de oro de la acumulación toma la forma

$$\frac{\partial F_2}{\partial K_2} = (1 - \beta) \frac{X_2}{K_2} = n ,$$

y, teniendo en cuenta que $X_2 = n K$, se sigue:

$$K_2 = (1 - \beta) K . \qquad [5]$$

Por lo tanto, entre los estados balanceados, el consumo per cápita es máximo para aquel que es eficiente y cuya proporción de capital en el sector de bienes de inversión es igual a la elasticidad de la productividad marginal del capital en ese sector (que es una constante).

II

En esta sección introduciremos el marco institucional de la economía y formularemos el problema central de este artículo.

Si el estado balanceado óptimo es realizable, puede obtenerse, en principio, fijando al nivel adecuado las asignaciones de factores a los dos sectores.

Sin embargo, en las situaciones prácticas más interesantes, la autoridad central no dispondrá de tanta libertad de acción. En general, el montaje institucional de la economía (propiedad privada, por ejemplo) limitará el número de variables sobre las que se puede actuar. Dado, pues, un conjunto de hipótesis institucionales y de comportamiento, una primera clase de problemas consistirá en conocer qué «instrumentos» basta controlar para alcanzar el estado balanceado óptimo (si es realizable), y una segunda clase en investigar las características del estado balanceado que maximiza el consumo per cápita, cuando el instrumento utilizable está predeterminado y el *óptima optimórum* no es alcanzable.

[1] Se puede suponer que las unidades de trabajo y del bien de consumo se han escogido de tal forma que la constante multiplicativa de la función de producción es igual a uno.

Considérese la economía de propiedad privada siguiente. Para cada precio de los bienes de inversión, salario y rentas del capital (todo ello en unidades del bien de consumo) los «managers» de las funciones de producción intentan maximizar beneficios y los participantes en la economía intentan maximizar ingreso (ofreciendo, en el mercado, servicios de capital y trabajo). Una proporción constante s de la renta nacional se gasta en bienes de consumo, el resto en inversión. Un estado de la economía y una especificación de precios, salario y rentas del capital es un *equilibrio competitivo* si la demanda excedente es nula en todos los mercados (servicios del capital, trabajo, bienes de inversión y bienes de consumo). Es bien sabido que un estado de la economía correspondiente a un equilibrio competitivo es eficiente.

Formalmente, sea:

w_i: Salario del trabajo en el sector i en unidades del bien de consumo; $i=1, 2$.

r_i: Renta por unidad de servicio del capital en el sector i en unidades del bien de consumo; $i=1, 2$.

p: Precio del bien de inversión en términos del bien de consumo.

Para cada (p, X_1, X_2) la renta nacional Y se define por $Y=X_1+p\,X_2$. Las condiciones para que $K_1, K_2, L_1, L_2, p, w_1, w_2, r_1, r_2,$ sea un equilibrio competitivo serán:

$$\text{i)}\quad w_1=\frac{\partial F_1}{\partial L_1}=p\frac{\partial F_2}{\partial L_2}=w_2,$$

$$\text{ii)}\quad r_1=\frac{\partial F_1}{\partial K_1}=p\frac{\partial F_2}{\partial K_2}=r_2, \qquad [6]$$

$$s\,(X_1+p\,X_2)=p\,X_2. \qquad [7]$$

Puede demostrarse [véase H. Uzawa (7)] que, dado $0<s<1$ y el capital y trabajo total de la economía, el equilibrio competitivo, si existe (y supondremos que éste es el caso), es único. Por lo tanto, un estado de la economía y un consumo per cápita quedan determinados sin ambigüedades.

Sea (K_1, K_2, L_1, L_2) el estado óptimo de la economía. Puesto que [3] se satisface si definimos

$$p=\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial K_1}}{\dfrac{\partial F_2}{\partial K_2}}$$

ese estado será el correspondiente a un equilibrio competitivo para

$$K = K_1 + K_2,\ L = L_1 + L_2,$$

$$s = \frac{1}{p\, F_2\,(K_2, L_2)}\,[F_1\,(K_1, L_1) + p\, F_2\,(K_2, L_2)]$$

Esto quiere decir que, bajo las hipótesis de este modelo, el estado óptimo puede alcanzarse como un equilibrio del sistema si el tipo de ahorro es una variable controlable.

En el resto de este artículo nos ocuparemos de un problema de la segunda clase. El instrumento utilizable está predeterminado y, excepto por casualidad, el estado óptimo no será alcanzable. Como contraste con la situación de los párrafos anteriores, el instrumento no afectará a los mercados de los productos, sino a los de los factores.

Supondremos que la tasa constante de ahorro es fija, pero que la autoridad central puede controlar, a través, por ejemplo, de la política impositiva sobre los beneficios, la magnitud relativa del stock de capital empleado en el sector de bienes de consumo λ $(0 < \lambda < 1)$. Naturalmente, [6] ii) debe ser eliminada como condición de equilibrio, pero todas las demás, [6] i) y [7], se mantendrán.

Se demostrará primero que este es un modelo bien definido, es decir, que dados K, L y λ, [6] i) y [7] determinan a lo sumo un estado de pleno empleo de la economía. Aprovecharemos la homogeneidad de grado uno de las funciones de producción para llevar a cabo el análisis por unidad de bien de capital.

Sea:

$x_i = \dfrac{X_i}{K_i}$, producción en el sector i por unidad de capital en el sector i ; $i = 1,2$:

$$l_i = \frac{L_i}{K_i}\ ,\quad k_i = \frac{1}{l_i} = \frac{K_i}{L_i}\ ,\quad i = 1,2\ ;\quad l = \frac{1}{k} = \frac{L_1 + L_2}{K_1 + K_2},$$

$$\lambda = \frac{K_1}{K_1 + K_2}.$$

Definamos

$$f_i\,(l_i) = F_i\left(\frac{L_i}{K_i}, 1\right)\ ;\quad i = 1,2.$$

Entonces $x_i = f_i\,(l_i)$ y claramente (por el teorema de Euler):

$$f'_i = \frac{d\, f_i}{d\, l_i} = \frac{\partial\, F_i}{\partial\, L_i} \quad \text{y} \quad f_i - l_i\, f'_i = \frac{\partial\, F_i}{\partial\, K_i}\ ;\quad i = 1,2. \qquad [8]$$

Defínase:

$$u_i\,(l_i)=\frac{\dfrac{\partial F_i}{\partial K_i}}{\dfrac{\partial F_i}{\partial L_i}}=\frac{f_i}{f'_i}-l_i \quad ; \quad i=1,2.$$

Expresando [6] i) y [7] por unidad de capital y manipulando brevemente se obtiene:

$$\frac{u_1\,(l_1)+l_1}{u_2\,(l_2)+l_2}\;\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{s}{1-s}. \qquad [9]$$

Dado λ (recuérdese que permanece fijo desde el principio) [9] es una expresión implícita en las variables l_1, l_2. En virtud de la hipótesis 2 puede resolverse explícitamente en la forma $l_1=\Phi\,(l_2)$.

La función Φ se representa en la figura 1. Será siempre creciente. Supondremos que $\lim_{l_2\to 0}\Phi\,(l_2)=0$ (otra ver las condiciones de Inada garantizarían esta propiedad).

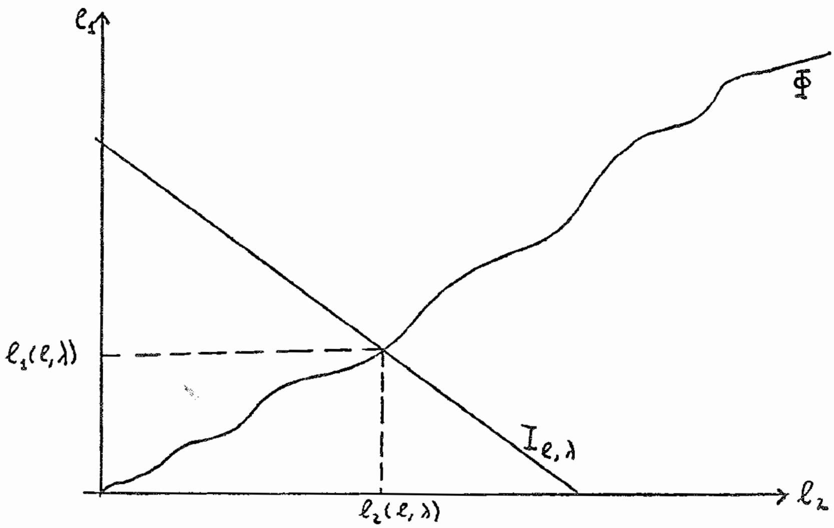

FIGURA 1

Dado l y λ, un estado realizable (con pleno empleo de los factores) deberá cumplir:

$$l=\lambda\,l_1+(1-\lambda)\,l_2 \qquad [10]$$

La ecuación [10] determina la recta $I_{l,\lambda}$ de la figura 1. La intersección de $I_{l,\lambda}$ con el gráfico de Φ da la solución, necesariamente única, de [9] y [10] en las variables l_1, l_2. Se denotará $l_1\,(l,\lambda)$, $l_2\,(l,\lambda)$.

Así, para $\bar{K}$, $\bar{L}$, λ dados, [6] i) y [7] generan un único estado de la economía, a saber: $\lambda \bar{K}$, $(1-\lambda)\bar{K}$, $\lambda l_1(\bar{l}, \lambda)\bar{K}$, $(1-\lambda) l_2(\bar{l}, \lambda)\bar{K}$, donde

$$\bar{l}=\frac{\bar{L}}{\bar{K}}.$$

Por definición (véase [1]) un estado será balanceado si:

$$(1-\lambda) f_2[l_2(l, \lambda)]=n. \qquad [11]$$

El consumo per cápita (c) viene dado por

$$c=\frac{X_1}{L_1+L_2}=\frac{\lambda}{l}x_1=\frac{\lambda}{l}f_1[l_1(l, \lambda)]. \qquad [12]$$

Estamos en condiciones de formular nuestro problema; éste sería:

$$\underset{(\lambda,\, l)}{\text{Maximizar}}\ \frac{\lambda}{l} f_1[l_1(\lambda, l)] \qquad [13]$$

$$\text{Sujeto a} \quad \text{i)} \quad f_2[l_2(l, \lambda)]=\frac{n}{1-\lambda},$$

$$\text{ii)} \quad 0<\lambda<1,$$

$$\text{iii)} \quad 0<l.$$

Supongamos que las funciones de producción de ambos sectores son Cobb-Douglas:

$$f_1(l_1)=l_1^{\alpha} \quad ; \quad f_2(l_2)=l_2^{\beta} \quad ; \quad 0<\alpha, \beta<1.$$

La expresión [9] toma la forma:

$$\frac{(1-s)}{s}\frac{\alpha}{\beta}\frac{l_2}{l_1}=\frac{\lambda}{1-\lambda}. \qquad [14]$$

Sea: $a=s\beta$; $b=(1-s)\alpha$.

De [14] y [10] se sigue:

$$l_2=\frac{a+b}{a}\frac{l}{1-\lambda} \quad ; \quad l_1=\frac{a+b}{b}\frac{l}{\lambda}. \qquad [15]$$

Sustituyendo en [12]:

$$c=\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\alpha}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^{\alpha-1}. \qquad [16]$$

La condición de estado balanceado [11] permite expresar l como función de λ. En efecto, sustituyendo [15] en [11] obtenemos:

$$l = n^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot (1-\lambda)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \qquad [17]$$

de donde, sustituyendo en [16]

$$c = \frac{a}{b}^{\alpha} \frac{(a+b)\, n^{-\frac{\alpha-1}{\beta}}}{a} \lambda^{(1-\alpha)} \cdot (1-\lambda)^{\frac{(\beta-1)(\alpha-1)}{\beta}}. \qquad [18]$$

El problema consiste, por lo tanto, en maximizar la expresión [18] considerada como una función de la variable única λ. Está claro que [18] tiene un máximo y que éste es único. Diferenciando e igualando la derivada a cero se sigue que el máximo se obtendrá para:

$$\hat{\lambda} = \beta \qquad [19]$$

Este resultado es notable porque (compárese con [5]) [19] es precisamente la regla de oro de la acumulación. Nótese que, salvo por casualidad, la condición de eficiencia estática no se cumplirá ($u_1 \neq u_2$). Es decir, a pesar de haber introducido otra restricción (de carácter estático [14]) en el modelo básico la regla de oro de la acumulación continúa siendo una condición necesaria para un máximo; sólo las condiciones de eficiencia estática quedan afectadas.

Se plantea inmediatamente la cuestión de la generalidad de este resultado, ¿hasta qué punto depende de las funciones de producción utilizadas? Las investigaciones sobre problemas de suboptimización *(second best)* en economía del bienestar nos han familiarizado con la idea de que si se introduce una restricción adicional en un problema de optimización no hay que esperar, en general, que las condiciones de optimalidad se preserven ni total ni parcialmente. El presente ejercicio no es una excepción. Es fácil encontrar ejemplos donde el «estado subóptimo» correspondiente a nuestro problema no cumple la regla de oro. Sin embargo, y quizá un tanto sorprendentemente a la vista del resultado anterior, puede probarse un resultado mucho más fuerte: que el caso de las funciones de producción Cobb-Douglas está próximo a ser el único en que la regla de oro de la acumulación caracteriza el máximo. Más precisamente y como resumen:

Proposición 1: *Si $(\hat{l}, \hat{\lambda})$ es una solución de [13] en que el estado de la economía correspondiente satisface la regla de oro de la acumulación, entonces, o bien ese estado es eficiente, o bien la elasticidad de sustitución en el sector de bienes de inversión [en el punto $l_2(\hat{l}, \hat{\lambda})$] es unitaria. Además, si ambas funciones de producción son Cobb-Douglas la solución de [13] se caracteriza por satisfacer la regla de oro de la acumulación.* [20]

La primera posibilidad, que $u_1 = u_2$, puede desestimarse sin más, corresponde a los casos excepcionales en que el estado óptimo (no sometido a restricciones) es de hecho alcanzable. La proposición 1 afirma, por lo tanto, que, en general, si la elasticidad de sustitución del sector de bienes de inversión (para todo l_2) es distinta de 1, la solución de [13] no podrá satisfacer la regla de oro de la acumulación. ¿Qué ocurre si la función de producción en el sector de bienes de inversión es Cobb-Douglas? Si la función de producción del otro sector también lo es, entonces el estado que cumple la regla de oro es el máximo. Si ese no es el caso, puede aún afirmarse (como se verá en la próxima sección) que el estado que satisface la regla de oro es un punto estacionario de la función a maximizar. No hemos sabido concluir nada más preciso, pero conjeturamos que no puede irse más allá de afirmar que se trata de un máximo local.

La sección III se dedicará a la demostración de la proposición 1.

III

Demostración de la proposición 1:

Supóngase que $(\hat{l}, \hat{\lambda})$ satisface las hipótesis de la proposición.

En virtud de [11], l_2 es función de λ, y puesto que l_1 es función de l_2 (por [9]), lo es, en definitiva, de λ. Podemos, pues (utilizando [10]), expresar l como una función $l(\lambda)$ de λ, y, en consecuencia, [13] queda reducido a maximizar respecto a λ $(0 < \lambda < 1)$ la expresión:

$$c(\lambda) = \frac{\lambda}{l(\lambda)} f_1 [l_1 [\lambda, l(\lambda)]] \qquad [21]$$

Con el fin de simplificar la notación, supondremos en adelante que todas las expresiones que se calculen están evaluadas para $\lambda = \hat{\lambda}$.

Así, l significa $\hat{l}$, f_1 significa $f_1[l_1[l(\hat{\lambda}),\hat{\lambda}]]$, f'_2 significa

$$\frac{\partial f_2}{\partial l_2}\bigg|\, l_2\ [l(\hat{\lambda}),\hat{\lambda}], \text{ etc.}$$

La derivada logarítmica de [21] [en el punto $(\hat{l},\hat{\lambda})$] debe ser igual a cero:

$$\frac{1}{c}\,\frac{dc}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{l}\,\frac{dl}{d\lambda}+\frac{f'_1}{f_1}\,\frac{dl_1}{d\lambda}=0. \qquad [22]$$

Calculando $\dfrac{dl}{d\lambda}$ a partir de [10], sustituyendo en [22] y reordenando términos:

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{l}\left[(1-\lambda)\,\frac{dl_2}{d\lambda}+l_1-l_2\right]+\frac{dl_1}{d\lambda}\left[\frac{f'_1}{f_1}-\frac{\lambda}{l}\right]=0. \qquad [23]$$

De [11] obtenemos:

$$\frac{dl_2}{d\lambda}=\frac{1}{f'_2}\,\frac{n}{(1-\lambda)^2}=\frac{1}{1-\lambda}\,\frac{f_2}{f'_2}=\frac{u_2+l_2}{1-\lambda}. \qquad [24]$$

Por hipótesis, la regla de oro de la acumulación se satisface, es decir:

$$f_2-l_2f'_2=n. \qquad [25]$$

Sustituyendo [11] en [25]:

$$f'_2=\frac{n\lambda}{(1-\lambda)\,l_2};\quad u_2+l_2=\frac{f_2}{f'_2}=\frac{l_2}{\lambda}. \qquad [26]$$

Sustituyendo [26] en [24] y teniendo en cuenta [10], tenemos:

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{l}\left[(1-\lambda)\,\frac{dl_2}{d\lambda}+l_1-l_2\right]=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{l}\left[\frac{l_2}{\lambda}+l_1-l_2\right]=0. \qquad [27]$$

Por lo tanto, [23] queda reducido a:

$$\frac{dl_1}{d\lambda}\left[\frac{f'_1}{f_1}-\frac{\lambda}{l}\right]=0. \qquad [28]$$

Consideremos los dos casos:

i) $$\frac{dl_1}{d\lambda}=0.$$

Reescribiendo [9] en la forma:

$$\frac{1-s}{s}(1-\lambda)(u_2+l_2)-\lambda(u_1+l_1)=0. \qquad [29]$$

y, diferenciando totalmente respecto a λ, se tiene:

$$-\frac{1-s}{s}(u_2+l_2)-(u_1+l_1)+\frac{1-s}{s}(1-\lambda)\left(\frac{d\,u_2}{d\,l_2}+1\right)$$
$$\frac{d\,l_2}{d\,\lambda}-\left(\frac{d\,u_1}{d\,l_1}+1\right)\frac{d\,l_1}{d\,\lambda}=0 \qquad [30]$$

Sustituyendo [26], [30] se reduce a:

$$\frac{1-s}{s}(u_2+l_2)\frac{d\,u_2}{d\,l_2}-(u_1+l_1)-\lambda\left(\frac{d\,u_1}{d\,l_1}+1\right)\frac{d\,l_1}{d\,\lambda}=0. \qquad [31]$$

Puesto que $\frac{d\,u_1}{d\,l_1}>0$:

$$\text{signo}\ \frac{d\,l_1}{d\,\lambda}=\text{signo}\left\{\frac{1-s}{s}(u_2+l_2)\frac{d\,u_2}{d\,l_2}-(u_1+l_1)\right\} \qquad [32]$$

y utilizando [29]:

$$\text{signo}\ \frac{d\,l_1}{d\,\lambda}=\text{signo}\left\{\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{d\,u_2}{d\,l_2}-1\right\} \qquad [33]$$

Ahora bien, de [26] se sigue que $\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{l_2}{u_2}$. por lo tanto:

$$\frac{d\,l_1}{d\,\lambda}=0 \qquad [34]$$

si y sólo si $\frac{l_2}{u_2}\frac{d\,u_2}{d\,l_2}=1$; es decir, por definición de la elasticidad de sustitución, $\frac{d\,l_1}{d\,\lambda}=0$, si y sólo si la elasticidad de sustitución en el sector de bienes de inversión es unitaria [en el punto $(\hat{l},\hat{\lambda})$].

ii) $$\frac{f'_1}{f_1}-\frac{\lambda}{l}=0.$$

Por lo tanto,

$$l=\lambda(u_1+l_1). \qquad [35]$$

A la vista de [10] se sigue:

$$\lambda u_1 = (1 - \lambda) \; l_2. \qquad [36]$$

Puesto que [26] implica $\lambda u_2 = (1 - \lambda) l_2$, tenemos que $u_1 = u_2$, es decir, el estado determinado por $(\hat{\lambda}, \hat{l})$ es eficiente.

Puesto que las posibilidades i) y ii) son exhaustivas, la demostración queda concluida (la segunda parte de sa proposición fue demostrada en la sección II).

IV

En un instante temporal determinado, la cantidad de capital (y su distribución entre los sectores) de que la economía dispone está dada, y lo normal es que la trayectoria balanceada con consumo per cápita máximo no sea realizable. El verdadero problema de optimización consiste en encontrar la trayectoria realizable que maximice un criterio de bienestar bien definido. Ese es el llamado problema de Ramsey (6).

El tipo de cuestión estudiada en las secciones anteriores es muy relevante a este nuevo problema. Resulta ser el caso [véase, por ejemplo, T. Koopmans (4)] que, con funciones objetivo adecuadas, los candidatos a trayectoria óptima habrá que buscarlos entre las trayectorias realizables que converjan asintóticamente a la trayectoria balanceada con consumo per cápita máximo.

En las secciones II y III hemos resuelto el problema [13] cuando las funciones de producción son Cobb-Douglas. En esta sección discutiremos muy someramente (y con propósitos más bien ilustrativos) el problema de optimización más complejo para ese mismo caso.

Supóngase que la relación trabajo-capital inicial es l_0. Una trayectoria de la variable instrumento $\lambda(t)$ determinará una trayectoria de todas las variables del sistema. En efecto, $l(t)$ queda determinada por las condiciones:

$$l(0) = l_0 \qquad [37]$$

$$\dot{l}(t) = n\, l(t) - (1 - \lambda)\, f_2 \left[l_2 \left[l(t), \lambda(t) \right] \right]. \qquad [38]$$

[38] expresa que el aumento del stock de capital en cada momento del tiempo es igual a la producción del sector de bienes de inversión.

Así, dada una trayectoria $\lambda(t)$, queda determinada una trayectoria del consumo per cápita $c(t)$. Recuérdese que la variable λ sólo está definida para valores mayores que 0 y menores que 1.

Supondremos que, en cada momento, la utilidad social de una trayectoria $\lambda(t)$ viene medida por una función del consumo per cápita $v(c)$, doblemente diferenciable, y tal que para todo $\bar{c}$, $v'(\bar{c}) > 0$ y $v''(\bar{c}) < 0$ (utilidad marginal positiva y decreciente). El criterio de optimalidad que utilizaremos será, esencialmente, el «overtaking criterium» de C. v. Weizsäcker (8).

Diremos que la trayectoria $\hat{\lambda}(t)$ [a la que corresponde $\hat{c}(t)$] es óptima si dada cualquier otra trayectoria $\bar{\lambda}(t)$ [a la que corresponde $\bar{c}(t)$] existe un $T_o > 0$ tal que

$$\int_o^{T'} v[\hat{c}(t)]\,dt \geq \int_o^{T'} v[\bar{c}(t)]\,dt, \qquad [39]$$

para todo $T' > T_o$.

En lo sucesivo $v'_\lambda(\lambda, l)$, $v'_c(c)$ designará las derivadas parciales respecto a λ y c (respectivamente) de las funciones $v[c(\lambda,l)]$, $v(c)$ (respectivamente).

Vamos a considerar el caso de las funciones de producción Cobb-Douglas: $f_1(l_1) = l_1^\alpha$; $f_2(l_2) = l_2^\beta$. Sean $\hat{c}$, $\hat{l}$ el consumo per cápita y la relación trabajo-capital (respectivamente) correspondiente al estado balanceado que satisface $\lambda = \beta$ (la regla de oro); es decir, *c es el máximo de los consumos per cápita que, dadas las condiciones técnicas de la economía, pueden ser (si las condiciones iniciales son adecuadas) sostenidos indefinidamente.*

Supóngase que la trayectoria $\lambda(t)$ [a la que corresponde $c(t)$] es óptima. Puede demostrarse que, si ello es así, entonces $\lim c(t) = \hat{c}$ y $\lim l(t) = \hat{l}$. Esta afirmación es intuitivamente muy plausible [y muy simple si se acepta que $c(t)$ converge]. Su demostración no es trivial, pero sigue caminos trillados [véase D. Cass (2), T. Koopmans (4) y C. v. Weizsäcker (8)].

Proposición 2: Si $\bar{\lambda}$ (t) *es una trayectoria óptima correspondiente al modelo con funciones de producción Cobb-Douglas, la siguiente condición necesaria debe ser satisfecha para todo* t:

$$\frac{\dot{\bar{k}}(t)}{\bar{k}(t)} = \frac{\bar{r}_2(t)}{\bar{r}_1(t)} \; \frac{v(\hat{c}) - v[\bar{c}(t)]}{v'_c[\bar{c}(t)]} \qquad [39]$$

o, equivalentemente,

$$\frac{n}{\bar{r}_2(t)} - \frac{1 - \lambda(t)}{1 - \beta} = \frac{v[\bar{c}(t)] - v(\hat{c})}{v'_\lambda[\bar{\lambda}(t), \bar{l}(t)]} \qquad [40]$$

donde las trayectorias de todas las variables corresponden a $\bar{\lambda}$ (t).

Por supuesto, la proposición anterior no afirma nada sobre la existencia de una trayectoria óptima. La expresión [39] es semejante (está modelada sobre su ejemplo) a la regla de Ramsey (6). En un instante determinado t, l está dado y [40] (o [39]) es una ecuación implícita en la variable λ. Podría pensarse que, como en el caso de la regla de Ramsey, esto proporciona un método para computar la trayectoria óptima (obténgase λ (l) de [40], sustitúyase en [38] y resuélvase la ecuación diferencial). Sin embargo, no parece que, en general, la solución de [40] para l dado sea única.

Procedemos a demostrar la proposición.

Desígnese $B=\left[\dfrac{a+b}{b}\right]^{\alpha}$; $D=\left[\dfrac{a+b}{a}\right]^{\beta}$

Sustituyendo [15] en [38] (la referencia a t se eliminará para abreviar la notación):

$$\dot{l}=n\,l-D\cdot(1-\lambda)^{1-\beta}\cdot l^{\beta} \qquad [41]$$

Para todo $T>0$, $\bar{c}$ (t) maximiza la integral:

$$\int_0^T [v\,(c\,(t))-v\,(\hat{c})]\,d\,t \qquad [42]$$

sujeta a [16], [37], [38] (o [41]), y $c\,(T)=\bar{c}\,(T)$.

En virtud de [41], λ puede expresarse como función de l y $\dot{l}$:

$$(1-\lambda)=\left[\frac{n\,l-\dot{l}}{D\cdot l^{\beta}}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} \qquad [43]$$

Sustituyendo en [16] podríamos entonces expresar el integrando de [42] como una función solamente de l y $\dot{l}$, es decir:

$$v\,[c\,(t)]-v\,(\hat{c})\equiv G\,(l,\dot{l}) \qquad [44]$$

Puesto que $0<\bar{\lambda}\,(t)<1$ para todo t, se sigue que para todo T (como en [42]) $l\,(t), \dot{l}\,(t)$ $(t\leq T)$ deberán cumplir la ecuación de Euler-Lagrange con respecto a la función G. Puesto que ésta no incluye a t entre sus variables, aquélla tiene una integral exacta [véase I. Gelfand y S. Fomin (3), página 18], que viene dada por:

$$G-\dot{l}\,\frac{\partial G}{\partial \dot{l}}=C \qquad [45]$$

donde C es una constante de integración a determinar por las condiciones finales. Como hemos afirmado anteriormente, lim $\bar{c}(t) = \hat{c}$ y lim $\dot{\bar{l}}(t) = 0$; esto implica que:

$$G(\bar{l}, \dot{\bar{l}}) - \dot{l} \left. \frac{\partial G}{\partial \dot{l}} \right|_{\bar{l}, \dot{\bar{l}}}$$

que es igual a

$$\nu [\bar{c}(t)] - \nu(\hat{c}) - \dot{l} \left. \frac{\partial G}{\partial \dot{\bar{l}}} \right|_{\bar{l}, \dot{\bar{l}}} \partial \dot{l}$$

converge a 0. Por lo tanto, C=0.

Así, pues, la condición necesaria es:

$$\nu [c(t)] - \nu(\hat{c}) - \dot{l} \frac{\partial \nu [c [\lambda(\dot{l}), l(t)]]}{\partial \dot{l}} = 0. \qquad [46]$$

Utilizando [43] tenemos:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \frac{1}{(1-\beta) D} \left(\frac{1-\lambda}{l} \right)^{\beta} \qquad [47]$$

Obsérvese que:

$$\frac{1}{(1-\beta) D} \left(\frac{1-\lambda}{l} \right)^{\beta} \frac{1}{(1-\beta) l_2^{\beta}} = \frac{1}{r_2}. \qquad [48]$$

y

$$\nu'_{\lambda} [c(\lambda, l)] = \nu'_{c}(c)\,(1-\alpha)\,B \left(\frac{l}{\lambda} \right)^{\alpha} \frac{1}{l} = \frac{r_1}{l} \nu'_{c} \qquad [49]$$

Por lo tanto:

$$\dot{l} \frac{\partial \nu}{\partial \dot{l}} = \frac{\dot{l}}{l} \frac{r_1}{r_2} \nu'_{c}(c) \qquad [50]$$

Sustituyendo [50] en [46], y teniendo en cuenta que $\frac{\dot{l}}{l} = -\frac{\dot{k}}{k}$, la necesidad de [39] queda demostrada. La equivalencia de [39] y [40] se comprueba por medio de manipulaciones simples.

BIBLIOGRAFIA

(1) BURMEISTER E. y A. DOBELL: *Mathematical Theories of Economic Growth*. Macmillan, 1970.

(2) D. CASS: «Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation», *Review of Economic Studies*, XXXII (julio 1965).

(3) GELFAND I., y S. FOMIN: *Calculus of Variations*, Prentice Hall, 1963.

(4) KOOPMANS, T.: «On the Concept of Optimal Growth», en *The Econometric Approach to Development Planning*, North-Holland, 1965.

(5) PHELPS, E.: «The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen», *American Economic Review*, LI, 4 (septiembre 1961).

(6) RAMSEY, F.: «A Mathematical Theory of Savings», *Economic Journal*, XXXVIII (diciembre 1928).

(7) UZAWA, H.: «On a Two Sector Model of Económic Growth: II», *Reviev of Economic Studies*, XXX, 38 (junio 1963).

(8) WEIZSÄCKER, C. v.: «Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon», *Review of Economic Studies*, XXXII (abril 1965).