Algunos comentarios sobre la teoría cooperativa de los juegos

Andreu Mas-Colell

Universidad de Harvard

1. El punto de vista cooperativo

La teoría cooperativa de los juegos constituye una línea de ataque al análisis de las situaciones de conflicto estratégico que pone su énfasis en las implicaciones de la posibilidad, actual o potencial, de formación de coaliciones.

El inicio de la teoría cooperativa se remonta a los orígenes mismos de la teoría de los juegos. En efecto, ésta fue la línea de ataque propuesta por von Newman y Morgenstern (1947) para salvar el enorme foso entre las situaciones con dos jugadores y aquellos con más de dos jugadores (donde la teoría debe contemplar la posibilidad de que, por ejemplo, dos jugadores se coaliguen contra un tercero).

Será bueno admitir desde el principio que la teoría cooperativa no pretende ser sino un atajo teórico. El consenso dominante en nuestros días pone al nivel de fundamentos exclusivamente a la teoría no-cooperativa. Para analizar una situación de conflicto hay que empezar por describir con absoluta precisión las reglas del juego. Sólo entonces podemos estudiar sus equilibrios no-cooperativos. Aspectos como formación de coaliciones, etc., no serían sino incidencias en el despliegue temporal del equilibrio no-cooperativo. No hay duda que esta posición es, en principio, correcta. Pero no es tan claro que sea siempre productiva. Convertirla en una ortodoxia demasiado rígida lleva consigo un peligro de esterilidad. La razón es simple: son muchas las situaciones de conflicto para las que es muy difícil describir un juego con la precisión necesaria. Desgraciadamente, el nivel necesario de precisión puede ser muy alto ya que, como es bien sabido, los equilibrios no-cooperativos pueden ser muy sensibles a la estructura final del juego. La teoría no-cooperativa se nos ofrece, precisamente, como una alternativa para casos como éstos. Nos permite llevar a cabo un análisis, en ocasiones, muy rico, de la situación de conflicto. Pero lo hace dejando de lado algunos aspectos fundamentales. Como con el pecado hay tres actitudes posibles: i) huir de él, ii) contemplarlo con los ojos bien abiertos y continuar andando y iii) cerrar los ojos y continuar andando. La teoría cooperativa de los juegos puede ser un buen instrumento en manos de los adeptos a la segunda opción.

Será conveniente despejar desde el principio una posible confusión semántica. La teoría cooperativa de los juegos no supone que los jugadores estén a priori comprometidos a colaborar entre ellos. La única hipótesis (y ésta es completamente informal) es que todo grupo o subgrupo de jugadores tiene instrumentos para alcanzar compromisos de acción entre sus miembros. Una hipótesis subsidiaria, también informal, es que la negociación interna de cualquier grupo o coalición se realiza bajo condiciones de gran transparencia informativa. La teoría cooperativa de los juegos no ha sido, aún, muy fructífera para el análisis de juegos con información imperfecta y asimétrica.

Es imposible ofrecer en un artículo una revista panorámica de toda la teoría cooperativa de los juegos. Nos referiremos a los libros de Luce y Raiffa (1957), H. Moulin (1986), M. Shubik (1983) o G. Owen (1982), para esto (véase también Aumann, 1987). En estas breves páginas me concentraré en dos subteorías: i) la teoría del núcleo de un juego y ii) la teoría de la valoración de Shapley. Estas son representativas de las dos aproximaciones posibles al análisis de un juego. La positiva cuyo énfasis está en predecir el resultado final del conflicto abandonado, por así decirlo, a su propia lógica, o la normativa cuyo énfasis está en delimitar compromisos razonables. También me remitiré a Mas-Colell (1987) para un tratamiento similar (pero no idéntico) al de estas páginas.

La intención básica de este artículo es transmitir la importancia de un cierto número de ideas y conceptos. Por ello discutiremos muchos de ellos en el entorno más simple posible, a saber, el de utilidad transferible entre jugadores (o más concretamente, las utilidades son funciones lineales de los pagos en pesetas).

2. La forma característica de un juego

En esta sección se introducirá el modelo básico de la teoría cooperativa de los juegos: la forma característica. De momento nos limitaremos al caso de utilidad transferible. Más adelante discutiremos cómo pasar de la forma normal (apropiada para el análisis no cooperativo) a la forma característica.

Supongamos que tenemos un conjunto N de jugadores. La forma característica es una función $v(\cdot)$ que asocia a cada subconjunto no vacío de jugadores $S \subset N$ (también llamado una coalición) un número $v(S)$, interpretado como la utilidad total que la coalición S puede alcanzar por sus propios medios. Sobre esto comentaremos más intensamente en la sección.

Es común, pero no indispensable, normalizar un juego de tal forma que $v(i) = 0$ para todo jugador individual i. Un juego es superaditivo si $v(S \cup T) \geqslant$ $\geqslant v(S) + v(T)$ para todo par de coaliciones $S, T \subset N$ que sean disjuntas, es decir $S \cap T = \phi$. La interpretación de superaditividad es que la colaboración no crea interferencias negativas entre los jugadores.

Damos a continuación algunos ejemplos de formas características:

Ejemplo 1: Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y supongamos que la apropiación de una unidad de utilidad (de ahora en adelante diremos «una peseta») se decide por mayoría absoluta. Es decir, cualquier coalición de dos miembros puede apropiarse de la peseta. Entonces tenemos una forma característica: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = v(23) = v(13) = v(123) = 1$. El juego no es superaditivo.

Ejemplo 2: Supongamos que f: $[0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ es una función de producción libremente disponible a cualquier coalición de jugadores. La función de producción transforma factor de producción en utilidad. Cada jugador $i \in N$

posee una cantidad Z_i de factor. La forma característica generada es entonces $v(S) = f(\sum_{i \in S} Z_i)$. La superaditividad del juego depende de la forma de f. Si f exhibe rendimientos decrecientes a escala, entonces el juego no es superaditivo (y a la inversa si los rendimientos son constantes o crecientes).

Ejemplo 3: Supongamos que tenemos un modelo de equilibrio general de intercambio puro con N consumidores cada uno de los cuales dispone de una función de utilidad $u_i(x_i)$ y de un vector de dotaciones iniciales w_i. Si la utilidad es libremente transferible (es decir, si cada $u_i(\cdot)$ exhibe una utilidad marginal constante con respecto a, digamos, la mercancía 1), entonces podemos definir una forma característica $v(S) = \text{Máx}\,\{\sum_{i \in S} u_i(x_i) : \sum_{i \in S} x_i \leqslant \sum_{i \in S} w_i\}$.

Ejemplo 4: Este será un ejemplo completamente distinto. Supongamos que una empresa puede llevar a cabo N proyectos distintos. Para cada $S \subset N$ sea $C(S)$ el coste total en pesetas de llevar a cabo solamente los proyectos $S \subset N$. Entonces, formalmente, $C(\cdot)$ define un juego en forma característica donde los jugadores son los proyectos mismos. El paralelismo es completo si nos concentramos en $-C(\cdot)$. Por ejemplo, la superaditividad de $-C(\cdot)$ significa que $C(S \cup T) \leqslant C(S) + C(T)$, es decir, la producción conjunta de los proyectos en S y en T no causa interferencias mutuas.

Dado un juego en forma característica $v(\cdot)$, que supondremos superaditivo, una *imputación* es un vector $Y \in R^N$ tal que a $\sum_{i \in N} Y_i = v(N)$ (ésta es la propiedad de *eficiencia*). Una imputación es *individualmente racional* si $Y_i \geqslant v(i)$ para todo $i \in N$ (es decir, si cuando el resultado del juego es Y podemos decir que la participación de todos los jugadores es voluntaria).

El punto de vista fundamental de la teoría de los juegos cooperativos es que (suponiendo superaditividad) los jugadores terminarán por cooperar y repartirse $v(N)$ eficientemente entre ellos. Es decir, la solución de un juego será una imputación. Ahora bien, no todas las imputaciones serán aceptables. Lo que las distintas coaliciones pueden obtener por sí mismas, es decir $v(S)$, deberá tener una influencia sobre el resultado final. Modelar esta influencia es el objetivo de los varios conceptos de solución generados por la teoría cooperativa de los juegos. En estas páginas repasaremos los dos más importantes: el núcleo y la valoración de Shapley.

3. El núcleo

Dado un juego en forma característica $v(\cdot)$ el *núcleo* es un conjunto de imputaciones. Una imputación pertenece al núcleo si y solamente si $\sum_{i \in S} Y_i \geqslant v(S)$ para todo $S \subset N$. Nótese que cuando $S = N$ recuperamos la definición de eficiencia y cuando $S = \{i\}$ recuperamos la de racionalidad individual. Por tanto el núcleo es un subconjunto de las imputaciones que son individualmente racionales. Para interpretar el núcleo supóngase que $v(S) > \sum_{i \in S} Y_i$ para una coalición S.

Entonces sería posible para la coalición S mejorar por sus propios medios la situación de todos sus miembros. El núcleo es el conjunto de imputaciones donde esto nunca es posible. El núcleo fue formulado por primera vez en un contexto económico por Edgeworth en 1881 y en el de Teoría de juegos por Gillies y Shapley en 1953.

Supongamos que $N = \{1, 2, 3\}$ y el juego está normalizado $v(1) = v(2) = v(3) = 0$. La figura 1 provee una descripción gráfica del núcleo. El triángulo $\{1, 2, 3\}$ representa todas las imputaciones que son individualmente racionales, es decir $\{(Y_1, Y_2, Y_3) : Y_1, Y_2, Y_3 \geqslant 0;\ Y_1 + Y_2 + Y_3 = v(1, 2, 3)\}$

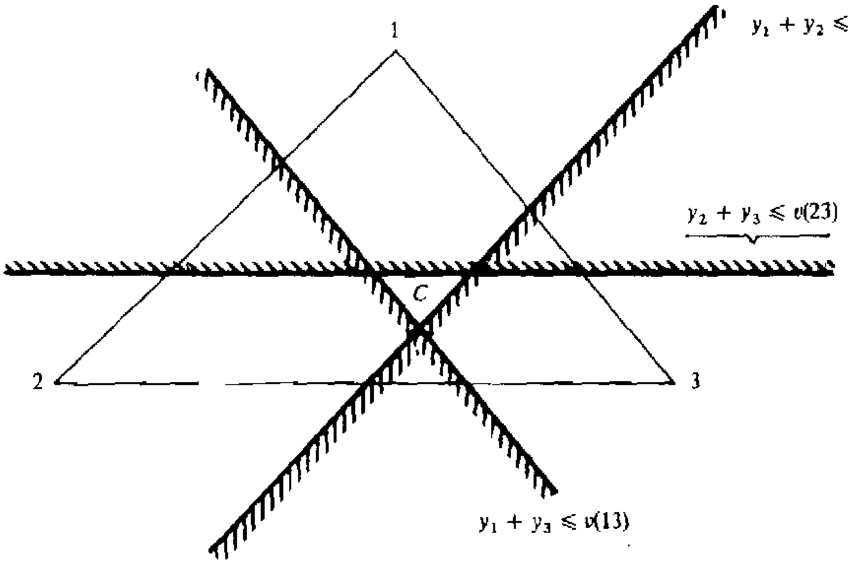

FIGURA 1

Una vez eliminadas las imputaciones que no son mejorables por las coaliciones 12, 13 ó 23 nos queda el pequeño triángulo C. Ese es el núcleo.

Es claro por la definición misma (y la figura 1 lo confirma) que el núcleo es un conjunto convexo. En cambio lo que no está ni mucho menos garantizado es que no sea vacío (si en la figura 1 desplazamos suficientemente cualquiera de las tres rectas correspondientes a coaliciones de dos jugadores el triángulo C desaparecerá).

Consideremos, por ejemplo, el caso: $N = \{1, 2, 3\}$; $v(1) = v(2) = v(3) = 0$. Puede demostrarse utilizando técnicas simples de programación lineal que la condición necesaria y suficiente para que el núcleo no sea vacío es que $2v(123) \geqslant v(12) + v(23) + v(13)$. En el ejemplo 1 esta condición no se cumple y, en efecto, el núcleo es vacío. Esta es una versión de la paradoja del voto: para cualquier propuesta de división de $v(123)$ siempre hay una mayoría que se beneficiaría por excluir completamente al tercer jugador.

Ejemplo 5: $N = \{1, 2, 3\}$; $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(12) = 0$; $v(13) = v(23) = 1$; $v(123) = 1$. Este es un ejemplo de complementariedades a veces descrito como el ejemplo de los guantes derecho e izquierdo. La idea es que los jugadores

1 y 2 tienen un guante derecho cada uno de ellos mientras que el jugador 3 tiene un guante izquierdo. Sólo un par derecho-izquierdo proporciona utilidad. Este ejemplo satisface la condición necesaria y suficiente para que el núcleo sea vacío y, en efecto, no es difícil describir el núcleo. Este consiste de una sola imputación $y = (0, 0, 1)$. Sorprendentemente, los poseedores de guantes derechos no reciben utilidad alguna. La razón es clara: si un poseedor de un guante derecho recibe alguna utilidad entonces el otro poseedor de un guante puede formar una coalición con el poseedor del guante izquierdo y repartirse la utilidad del excluido. En otras palabras, y ello nos lleva a la próxima sección, los guantes derechos están en exceso de oferta a cualquier precio positivo.

4. Una interpretación del núcleo

Como la discusión del ejemplo 5 ya nos ha indicado, las ideas subyacentes al concepto del núcleo son muy semejantes a las del equilibrio competitivo. En efecto, imaginemos que cada jugador es un factor de producción y que el juego $v(\cdot)$ es una descripción de la tecnología (para cada grupo de factores $S \subset N$ nos da la cantidad $v(S)$ de producto obtenible) la cual está libremente disponible a cualquier entrante en el mercado (es decir, prevalece una situación de entrada libre). Entonces una imputación Y pertenece al núcleo si y sólo si Y constituyen precios de equilibrio competitivo para los factores. La condición $\sum_{i \in S} Y_i \geqslant v(S)$ para todo S nos dice que los beneficios potenciales son no positivos para cualquier proceso de producción factible (por tanto, no hay incentivos a la entrada) mientras que la condición $\sum_{i \in S} Y_i \leqslant v(N)$ nos asegura que el proceso de producción que utiliza todos los factores no reporta pérdidas.

La observación del párrafo anterior sugiere que un procedimiento algorítmico para conjuntar el famoso tâtonnement de Walras: empiécese con cualquier Y y váyanse aumentando (o disminuyendo) aquéllas Y_i cuyo factor i esté en exceso de demanda si pertenece a un conjunto S que maximiza beneficios al precio Y, y este máximo es positivo, es decir, si S es una solución al problema; $\text{Máx}\,\{v(T) - \sum_{i \in T} Y_i : T \subset N\}$ y si esa solución es positiva*. Aplicado con suficiente cuidado, este procedimiento conjuntará efectivamente imputaciones en el núcleo.

5. Algunos ejemplos y aplicaciones

En esta sección continuaremos la discusión de los ejemplos presentados en la sección 2. Con respecto al ejemplo 1 no tenemos nada que añadir a lo ya dicho: el núcleo es vacío.

Ejemplo 2 (continuación): Facilitará el análisis suponer que cada Z_i es una fracción muy pequeña de la cantidad total de factor (en el límite habrá un continuo de jugadores cada uno de los cuales posee una fracción infinitesimal

---

* Aquí permitimos $T = \phi$, en cuyo caso ponemos $v(\phi) = 0$.

del total del factor). Entonces la condición necesaria y suficiente para que el núcleo sea no vacío es que la productividad media alcance su máximo sobre el intervalo $[0, \sum_{i \in N} Z_i]$ en el punto $\sum_{i \in N} Z_i$. Dicho de otra forma. Normalícese de tal forma que $\sum_{i \in N} Z_i = 1$ y $f(\sum_{i \in N} Z_i) = 1$. Entonces, la condición es que $\frac{f(Z)}{Z} \leqslant 1$ para todo $0 \leqslant Z \leqslant 1$. Es fácil demostrar que esta condición es necesaria y suficiente. Para suficiencia considérese la imputación proporcional $Y_i = Z_i$. Esta imputación pertenece al núcleo puesto que, para todo $S \subset N$, $\sum_{i \in S} Y_i = \sum_{i \in S} Z_i \geqslant f(\sum_{i \in S} Z_i)$. Para demostrar la necesidad supóngase que $f(Z') > Z'$ para algún $0 < Z' < 1$. Considérese cualquier imputación Y. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{Y_i}{Z_i} \leqslant \frac{Y_{i+1}}{Z_{i+1}}$ (esto es simplemente cuestión de numerar a los jugadores apropiadamente). Entonces $\sum_{i=1}^{m} Y_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} Z_i$ para todo m (sino $\sum_{i=1}^{N} Y_i > 1$).

Puesto que cada Z_i es muy pequeño habrá un m tal que $\sum_{i=1}^{m} Z_i \approx Z'$ (donde $\approx$ significa aproximadamente igual). Tómese $S = \{1, ..., m\}$. Entonces, $\sum_{i \in S} Y_i \leqslant Z' < f(Z') = f(\sum_{i \in S} Z_i)$ y, por tanto, Y no pertenecerá al núcleo. Es decir, el núcleo es vacío. (Nota: una demostración rigurosa de necesidad requiere un continuo de jugadores.)

Estudiemos el caso particularmente simple donde $Z_i = Z$ para todo i. ¿Cómo podemos describir el núcleo? Sencillamente, cada imputación Y no es más que una distribución de producto entre individuos idénticos. Con cada distribución podemos asociar una curva de Lorentz L_y. Entonces Y pertenece al núcleo si y sólo si, la curva L_y (que es el gráfico de una función convexa) queda enteramente por encima del gráfico de f (se asume la normalización $\sum_{i \in N} Z_i = 1$ y $f(1) = 1$). En la figura 2a) el núcleo es vacío (no hay lugar para una curva de Lorentz encima de f); en 2b) el núcleo consiste de una sola imputación: la completamente igualitaria; en 2c), donde los rendimientos marginales son crecientes, el núcleo es relativamente grande (y será tanto mayor cuanto mayor sea el grado de rendimientos crecientes).

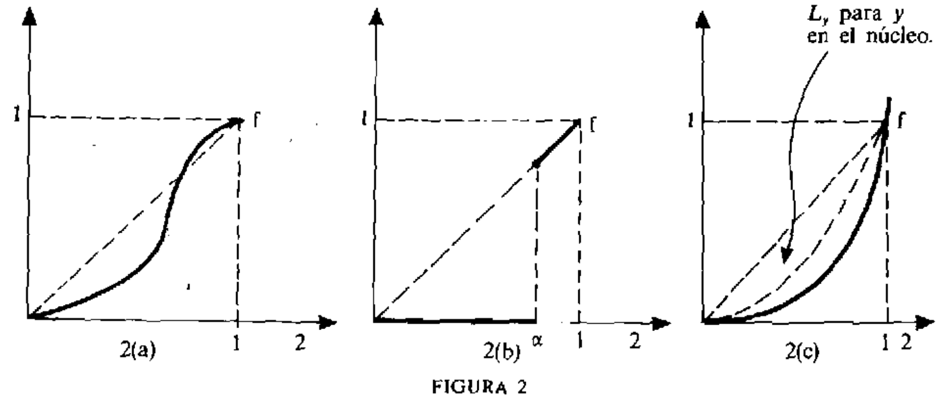

FIGURA 2

Es instructivo considerar el caso de la figura 2b) (rendimientos marginales constantes y costes fijos α para producción positiva) en relación al número de jugadores. La imputación igualitaria es la única imputación en el núcleo solamente si $Z < 1 - \alpha$, es decir, solamente si $N > \frac{1}{1-\alpha}$ (hipótesis ésta implícitamente mantenida en la discusión anterior). Si $N < \frac{1}{1-\alpha}$ entonces cualquier Y pertenece al núcleo. Esto ilustra uno de los grandes temas de la teoría del núcleo: que éste tiende a reducirse cuando el número de jugadores aumenta. Véase la discusión del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3 (continuación): En la figura 3 se presenta una ilustración en la caja de Edgeworth del núcleo para el caso de dos jugadores. Por definición el núcleo está formado por las asignaciones de mercancías que son óptimas en el sentido de Pareto y que para los dos consumidores son al menos tan deseadas como sus dotaciones iniciales. Es decir, consiste en el segmento C.

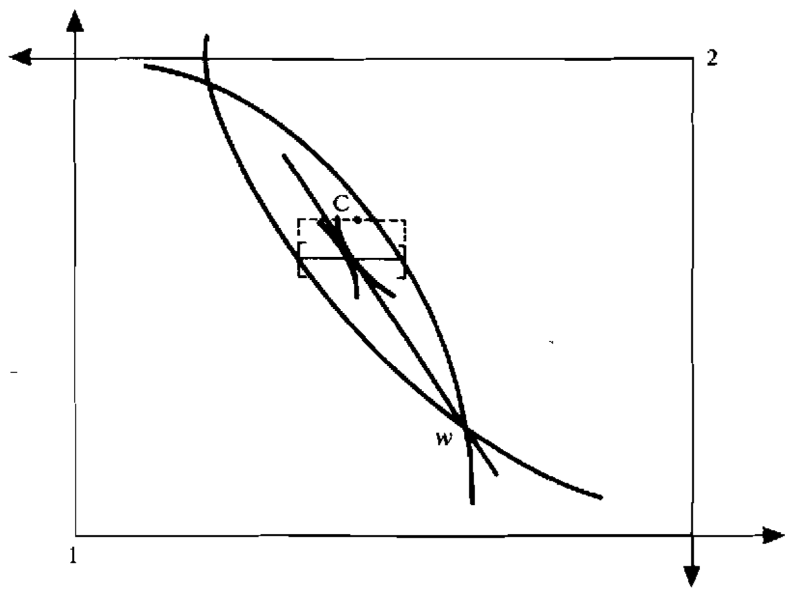

FIGURA 3

Obsérvese que en la figura, el equilibrio competitivo pertenece al núcleo. Ello es completamente general. En efecto, sea p un vector de precios de equilibrio y x_i, $i \in N$ la asignación competitiva. Supongamos que hubiera una coalición $S \subset N$ tal que $v(S) > \sum_{i \in S} u_i(x_i)$ o, en otras palabras, tal que pudiéramos encontrar x_i', $i \in S$, con las propiedades: $\sum_{i \in S} x_i' \leqslant \sum_{i \in S} w_i$ y $u_i(x_i') > u_i(x_i)$ para todo i. Pero entonces la definición de equilibrio competitivo nos da $px_i' > pw_i$ para cada $i \in S$ y, por tanto, $p(\sum_{i \in S} x_i') > p(\sum_{i \in S} w_i)$ lo que contradice $\sum_{i \in S} x_i' \leqslant \sum_{i \in S} w_i$. Debemos, por tanto, concluir que $(u_1(x_1), ..., u_N(x_N))$ pertenece al conjunto núcleo.

Uno de los resultados más espectaculares de la teoría del núcleo fue la demostración por Edgeworth (¡en 1881!) y luego por Debreu y Scarf (1963) del siguiente resultado: Digamos que una economía es de tamaño r si está formada por rn consumidores con r consumidores por cada miembro de una lista fija de n tipos de funciones de utilidad y dotaciones iniciales. Entonces: i) las asignaciones en el núcleo tienen la propiedad de tratamiento igual (dos consumidores iguales reciben exactamente el mismo vector de mercancías) y ii) si aprovechamos la propiedad de tratamiento igual y representamos los núcleos correspondientes a economías de distintos tamaños en la misma caja de Edgeworth entonces a medida que $r \to \infty$ el núcleo se contrae al conjunto de asignaciones competitivas (la representación de este conjunto es independiente del tamaño). No es éste el lugar para demostrar este Teorema de Equivalencia entre el núcleo y los equilibrios competitivos, ni sus múltiples extensiones (véase, por ejemplo, Hildenbrand y Kirman, 1988). La intuición esencial, sin embargo, es la siguiente: en el equilibrio competitivo, el proceso de formación de precios se lleva a cabo al nivel de las unidades de mercancías. Por el contrario, como vimos en la sección 4 el núcleo corresponde a un proceso competitivo donde las unidades básicas son los jugadores-consumidores. Las dotaciones iniciales de éstos siempre van juntas. Hay, por tanto, mucha menos divisibilidad en la competencia subyacente al núcleo y, en consecuencia, el conjunto de «equilibrios» es mayor. Cuando el número de jugadores es muy grande entonces en términos relativos (y ésos son los que importan) la divisibilidad es la misma y no hay casi diferencia entre el modelo que genera precios por unidad de mercancía y otro que genera precios por unidad de jugador.

Ejemplo 4 (continuación): En este ejemplo una imputación en el núcleo corresponde a una asignación de costes que divide a (N) entre los N proyectos de tal forma que no hay incentivo para la segregación de ningún subgrupo de proyectos. El modelo es relevante para la llamada teoría de los mercados contestables (véase Baumol, Panzar y Willig, 1982). En efecto, si suponemos que los distintos proyectos son los servicios ofrecidos por un monopolio natural entonces una asignación en el núcleo no es otra cosa que una estructura de tarificación inmune a ser invadida por un entrante que ofrezca sólo un subconjunto de los servicios (a precios más baratos y cubriendo costes). Por tanto, podríamos decir que un monopolio natural es sostenible si y sólo si el núcleo del juego de costes asociado no es vacío.

6. Una dificultad con el núcleo

Hemos visto como en el ejemplo 1 el núcleo es vacío. En efecto la imputación simétrica $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ puede ser mejorada por cualquier coalición de los jugadores. Pero ¿cuál puede ser el incentivo de, digamos, la coalición $\{1, 2\}$ en establecer la imputación $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ si con ello lo único que se está logrando es que esa imputación sea a su vez mejorada por la coalición $\{1, 3\}$ o $\{2, 3\}$? Más enfáticamente, considérese otra vez el ejemplo 5 y, por ejemplo, la imputación $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La misma no está en el núcleo puesto que, por ejemplo, $v(13) > \frac{2}{3}$. Ahora bien, a la formación de una coalición $\{1, 3\}$ seguirá $\{2, 3\}$y a ésta $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}, \ldots$ y así sucesivamente. El resultado final será la imputación en el núcleo $(0, 0, 1)$. Es decir, la formación inicial de la coalición $\{1, 3\}$ supone un grado notable de miopía por parte del jugador 1.

En resumen, el núcleo es un concepto muy poco anticipativo. Esto facilita mucho la posibilidad de mejorar imputaciones y, consecuentemente, lleva con frecuencia a un núcleo vacío. Es esta falta de consistencia interna del concepto de núcleo la que llevó a von Neumann y Morgernstern a rechazarlo (más o menos explícitamente) y a proponer un concepto más sofisticado, el de *conjunto estable*. Por consideraciones similares Aumann y Maschler (1964) propusieron el *conjunto de negociación*. Son estas nociones demasiado especializadas para estas páginas. Nos limitaremos a hacer dos observaciones. La primera es que las aplicaciones económicas de estos conceptos han sido hasta el momento limitadas (aunque el veredicto final sobre su utilidad no es cosa inmediata). La segunda es que aunque son muy distintas entre sí las dos, y también el núcleo, son construcciones derivadas de la noción de *dominancia* de imputaciones (la imputación x domina a la imputación x' si para algún $S \subset N$ tenemos que $v(S) = \sum_{i \in S} x_1 > \sum_{i \in S} x_i'$). Tanto el conjunto estable como el de negociación tienen al núcleo como subconjunto (quizá vacío).

Otro concepto de interés (derivado históricamente de la línea de investigación que empieza con el conjunto de negociación) es el del nucleolo (que se debe a D. Schmeidler). También se basa en la noción de dominancia y tiene las siguientes características: i) asigna una imputación única a cada juego (con utilidad transferible) y ii) si el núcleo no es vacío entonces el nucleolo pertenece a él (véase el capítulo VII).

7. Utilidad no transferible

La teoría del núcleo se aplica sin grandes modificaciones a la situación más general donde las utilidades no son transferibles.

Por supuesto uno debe empezar por definir la forma característica sin transferibilidad. En ese caso escribimos $V(S)$ en vez de $v(S)$ y $V(S)$ denota no un número sino un conjunto $V(S) \subset R^S$ que se interpreta como las combinaciones de utilidades para los distintos jugadores de S que son alcanzables por la coalición S considerada aisladamente. Es usual suponer que hay disponibilidad libre de utilidad, es decir, que $-R^S_+ \subset V(S)$. Cada juego $v(\cdot)$ con utilidad transferible se identifica con el juego (formalmente) no transferible definido por $V(S) = \{u \in R^S \colon \sum_{i \in S} u_i \leqslant v(S)\}$.

Una imputación es ahora cualquier miembro $u \in V(N)$. Una imputación $u \in V(N)$ pertenece al núcleo si no hay ningún $S \subset N$ tal que para algún $u' \in V(S)$ tengamos $u_i' > u_i$ para todo $i \in S$ (a veces es más conveniente requerir $u_i' \geqslant u_i$ para todo $i \in S$ y $u_i' > u_i$ para al menos un i).

La figura 4 nos proporciona una ilustración del núcleo en el caso no transferible que es paralela a la de la figura 1 para el caso transferible. Ahora el núcleo está formado por los dos triángulos disjuntos indicados con la letra C. Así pues no hay razón alguna para que el núcleo sea convexo o ni tan siquiera conexo.

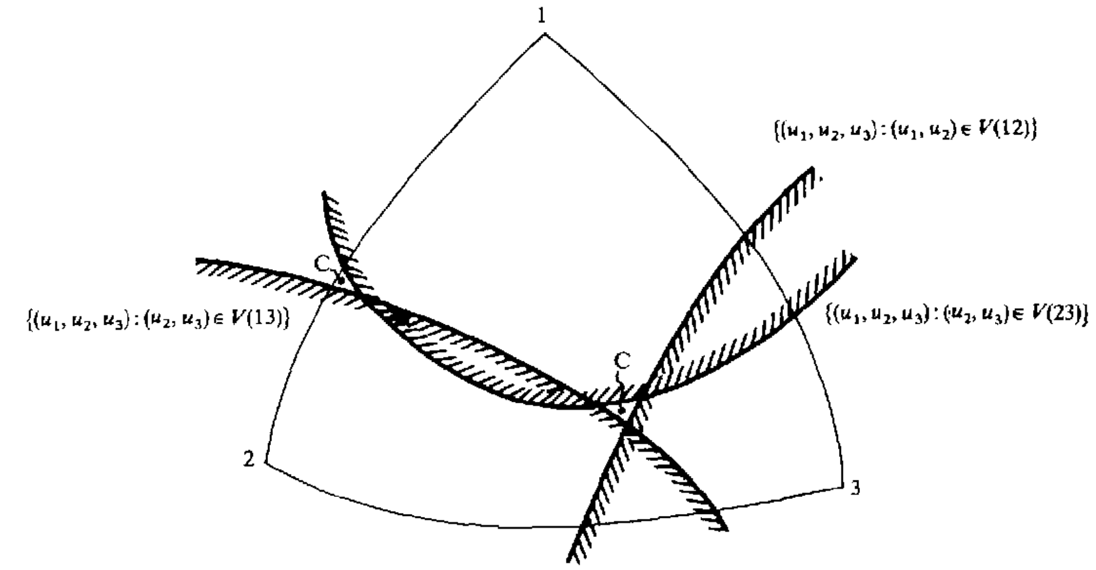

FIGURA 4

Hay condiciones suficientes (pero no ahora necesarias) para que el núcleo sea no vacío. Por ejemplo si $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = [-\infty, 0]$ y cada $v(S)$ es convexo entonces una condición suficiente es que $V(12) + V(13) + V(23) \subset 2V(123)$.

Con referencia a los ejemplos anteriores nótese que la discusión del ejemplo 3 no depende en absoluto de la transferibilidad de utilidad. Lo mismo es cierto el Teorema de Equivalencia allí mencionado.

8. De la forma normal a la característica

Hasta ahora hemos tomado la forma característica (con o sin transferibilidad de utilidad) como un concepto primitivo de la teoría. En los distintos ejemplos hemos descrito, más o menos informalmente, como se generaba en cada caso. Sin embargo, hay que decir que los ejemplos han sido elegidos ex profeso para que la definición de la forma característica no fuera una fuente posible de controversia. Desgraciadamente, la situación es en general mucho más complicada y puede muy bien suceder que en muchas aplicaciones no conozcamos de una versión única y natural de la forma característica. Si ello es así hay que proceder con mucho tiento. Dedicaremos ésta y la próxima sección a ilustrar este punto.

Supongamos que el juego nos es primitivamente descrito por medio de una forma normal $u_i(a)$, $i \in N$, donde $a = (a_1, ..., a_N)$ es una lista de las estrategias, o acciones, de los distintos jugadores. El problema en definir $v(S)$ (o $V(S)$) consiste en determinar qué estrategias a_i jugarán los jugadores i excluidos de la coalición S. Estas estrategias importan puesto que afectan a la utilidad de los miembros de S. La propuesta que se examinará en esta sección (y que no es ni mucho menos la única posible) se basará en expectativas pesimistas: la coalición S supone que la contracoalición $N \backslash S$ hará todo lo posible para perjudicarla.

Veamos primero el caso en que la utilidad es transferible. Entonces podemos definir

$$v(S) = \underset{a_S}{\text{Máx}} \ \underset{a_{N\backslash S}}{\text{Mín}} \sum_{i \in S} u_i(a_S, a_{N\backslash S})$$

Bajo condiciones muy generales (suficiente concavidad en las funciones de utilidad. La misma siempre se puede obtener admitiendo estrategias mixtas e interpretando las a_i como tales). También tenemos (en virtud del Teorema del MínMáx):

$$v(S) = \underset{a_{N\backslash S}}{\text{Mín}} \ \underset{a_S}{\text{Máx}} \sum_{i \in S} u_i(a_S, a_{N\backslash S})$$

Es decir, en orden a la definición de $V(S)$ no importa si suponemos que la coalición S fija sus acciones antes que $N \backslash S$ (lo cual lleva al MáxMín) o si es $N \backslash S$ la que toma la iniciativa (lo cual lleva al MínMáx).

El problema con esta definición pesimista de $v(S)$ es que el núcleo tenderá a ser muy grande (es muy difícil para una coalición mejorar cualquier propuesta). Así, en el ejemplo siguiente la teoría no tiene poder predictivo alguno. La contrapartida de esta observación es que cuando con la definición pesimista obtenemos un núcleo pequeño (como en los ejemplos del estilo de la sección 2) entonces la predicción teórica es muy sólida.

Ejemplo 6: Sean $N = \{1, 2, 3\}$ tres oligopolistas à la Cournot. La función inversa de demanda es $p = 1 - (a_1 + a_2 + a_3)$ donde a_i es la cantidad producida por la empresa i. Suponemos que los costes marginales son nulos. ¿Cuál es la forma característica de este juego? Si la obtenemos como se ha descrito anteriormente, entonces $v(N) = \frac{1}{4}$, los beneficios de monopolio, y $v(S) = 0$ para $S \neq N$ puesto que cualquier empresa excluida puede garantizar por sí sola que $p = 0$. En consecuencia, cualquier distribución de los beneficios de monopolio estará en el núcleo.

Pasemos ahora al caso donde la utilidad no es transferible. Tenemos entonces una complicación adicional: el concepto de MáxMín y el de MínMáx no coinciden (el primero es más estricto que el segundo). En otros términos, importa quién tenga la última palabra. Más precisamente, para cada coalición S podemos definir dos conjuntos:

$V_\alpha(S) = \{u_S \in R^S$: hay algún a_S tal que $u_S \leqslant u_S(a_S, a_{N\backslash S})$ para todo $a_{N\backslash S}\}$.
$V_\beta(S) = \{u_S \in R^S$: para todo $a_{N\backslash S}$ hay algún a_S tal que $u_S \leqslant u_S(a_S, a_{N\backslash S})$.

En palabras $V_\alpha(S)$ son las utilidades que los miembros del S pueden garantizarse mientras que $V_\beta(S)$ son las utilidades que los miembros de $N\backslash S$ no pueden impedir que sean alcanzadas por los miembros de S. Es como si en V_α los miembros de S toman una acción mientras que los de $N\backslash S$ replican. En V_β es al revés.

Cada una de las formas V_α y V_β generan un concepto de núcleo distinto, llamados, respectivamente, el núcleo α y el núcleo β. Obsérvese que siempre se tiene $V_\alpha(S) \subset V_\beta(S)$ (y claro está $V_\alpha(N) \subset V_\beta(N)$) y, por tanto, el núcleo β está contenido en el núcleo α. Como el siguiente ejemplo demuestra el núcleo α puede ser no vacío mientras que el β es vacío. En general, cuando el núcleo α y β difieren es muy difícil garantizar que el segundo no es vacío. Nos faltan buenos teoremas de existencia.

Ejemplo 7: (Inspirado en Shapley y Shubik, 1969). Sean tres consumidores $N = \{1, 2, 3\}$ cada uno de los cuales tiene una dotación inicial de las mercancías $w_1 = w_2 = w_3 = (1, 1)$ e idénticas funciones de utilidad $u_i(x_i, z_i) = x_i - z_i$. A la segunda mercancía la podríamos llamar «basura» puesto que tiene una utilidad negativa. Para definir el juego necesitamos especificar las estrategias de cada jugador. Estas consistirán en distribuciones de las dotaciones iniciales entre los tres jugadores. En otras palabras, una estrategia de i es un vector $a_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i, z_1^i, z_2^i, z_3^i)$ tal que $x_1^i + x_2^i + x_3^i = z_1^i + z_2^i + z_3^i = 1$. El núcleo x_1^i, o el z_1^i, se interpreta como la cantidad de la primera (o segunda) mercancía que el consumidor i regala (o «echa en el jardín») del consumidor 1. Entonces, $u_i(a) = (x_i^1 + x_i^2 + x_i^3) - (z_i^1 + z_i^2 + z_i^3)$.

Centrémonos en la asignación donde cada consumidor absorbe sus dotaciones iniciales. Comprobemos que esta asignación pertenece al núcleo α. Para que una coalición S la mejore (en el sentido α) debe existir una estrategia de S que proporcione utilidad positiva a cada miembro de S con independencia de la estrategia de $N\backslash S$. Pero ello quiere decir que cada miembro de S debe recibir más de una unidad de la primera mercancía pues de lo contrario ese miembro no está protegido contra la posibilidad de recibir una unidad de basura. Pero cada miembro de S no puede recibir más de una unidad de la primera mercancía. Esta contradicción demuestra que la asignación en cuestión pertenece al núcleo α, el cual, por tanto, no es vacío.

Comprobaremos ahora que el núcleo β es vacío. Consideremos una coalición de dos miembros. En el peor de los casos estos dos miembros han recibido una unidad de basura. Transfiriendo la primera mercancía entre ellos la coalición siempre puede asegurarse (recuérdese que la coalición replica a la contracoalición) que el impacto negativo del tercer miembro no representa más que, como máximo, $-\frac{1}{2}$ para cada uno de ellos. Puesto que toda la basura de la coalición puede transferirse al tercer jugador concluimos que a cada coalición de dos miembros no puede impedírsele obtener una utilidad de como mínimo $\frac{1}{2}$ para cada uno de ellos. A su vez cada jugador puede garantizarse como mínimo -1. No es entonces difícil ver que para toda asignación de utilidades tal que $u^1 +$

$+ u_2 + u_3 = 0$ y $u_i \geqslant -1$ para $i = 1, 2, 3$ habrá $i \neq j$ con $u_i, u_j \leqslant \frac{1}{2}$ y una de las dos desigualdades estricta.

9. El equilibrio fuerte de Nash

Una vez disponemos de una forma normal $u_i(a)$ es tentador prescindir de la forma característica y basar el análisis en versiones cooperativas del equilibrio de Nash. La más conocida es el equilibrio fuerte de Nash.

Diremos que el vector de estrategias a es un *equilibrio fuerte de Nash* si no existe ninguna coalición $S \subset N$ tal que para un vector de estrategias a_s' tenemos $u_i(a_s', a_{N\setminus S}) > u_i(a)$ para todo $i \in S$. El equilibrio fuerte de Nash difiere del núcleo en que se supone que la contracoalición $N\setminus S$ mantiene sus estrategias de referencia $a_{N\setminus S}$ (se basa, por decirlo así, en expectativas menos pesimistas y es, por tanto, más fácil de mejorar). Nótese que un equilibrio fuerte de Nash es en particular un equilibrio de Nash (tómese $S = \{i\}$ para los distintos i) y también un óptimo Paretiano (tómese $S = N$). Esto ya nos indica cuál es la dificultad principal de concepto: un equilibrio fuerte de Nash raramente existe. Considérese otra vez el ejemplo 6 donde, como vimos, el núcleo es muy grande. ¿Nos ayuda el concepto más estricto de equilibrio fuerte de Nash? No. Puesto que el equilibrio de Cournot es distinto de la solución de monopolio, se sigue que no existe ningún equilibrio fuerte de Nash.

10. La valoración de Shapley

Dejaremos ahora el núcleo y todas sus variaciones basadas en la idea de dominancia y presentaremos un concepto de solución muy distinto: la valoración de Shapley. Nos limitaremos al caso de utilidad transferible. Aunque también la valoración de Shapley ha sido generalizada al caso no transferible hay que reconocer que esta generalización es más compleja y menos natural que la correspondiente al núcleo. No la repasaremos aquí.

La idea subyacente a la valoración de Shapley es la de *solución arbitral*. Se trataría de asociar con cada juego una imputación que si fuera propuesta a los distintos jugadores al principio del juego les debería parecer a éstos, dadas las realidades incorporadas en la definición de la forma característica, una solución razonable. La valoración pasaría a ser, por tanto, el valor esperado del juego para cada jugador.

Es frecuente motivar la valoración de Shapley afirmando que representa la solución justa del juego. Preferiríamos, sin embargo, evitar cualquier connotación de justicia. La valoración es una solución arbitral que toma como dada la situación inicial descrita por el juego. Esta situación inicial puede ser muy injusta (favorecer a los vicios, por ejemplo) y en ese caso la solución final no constituirá ninguna mejoría. Dicho de otra forma: un tratamiento adecuado a las cuestiones de justicia debe tener un punto de vista globalizador que la valoración no posee.

La valoración como concepto de solución fue propuesto por Shapley (1953).

Su tratamiento fue axiomático, es decir, consistió en formular cuatro axiomas que razonablemente una solución arbitral debería satisfacer y demostrar entonces que los cuatro axiomas definen una solución única. Repasemos un tanto informalmente esos axiomas.

Para cada juego $v(\cdot)$ sea $Y(v) = \{Y_i(v) : i \in N\}$ la solución propuesta. Requeriremos que $Y(v)$ satisfaga:

I. *(Axioma de eficiencia):* $Y(v)$ es siempre una imputación. Es decir, el problema que se está resolviendo es el de distribuir $v(N)$ entre los N jugadores. La posibilidad de disgregación en subcoaliciones no se contempla.

II. *(Axioma de simetría):* Lo que un jugador recibe no depende de su nombre sino de su posición en el juego. Es decir, si intercambiamos las posiciones de dos jugadores también se intercambiarán las utilidades que reciben en la solución (todo esto es un tanto impreciso pero así lo dejaremos).

III. *(Axioma del jugador nulo):* Un jugador i es nulo («a dummy») en el juego V si no contribuye nada a ninguna coalición, es decir, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subset N$ (se permite $S = \phi$ y ponemos $v(\phi) = 0$). El axioma nos pide si i es nulo en V entonces $Y_i(v) = 0$. Quien nada contribuye nada recibe.

IV. *(Axioma de linealidad).* Sean v, v' dos juegos sobre el conjunto de jugadores N y α, β dos números reales. Definamos un nuevo juego $\alpha v + \beta v'$ por $(\alpha v + \beta v')(S) = \alpha v(S) + \beta v'(S)$ para todo $S \subset N$. Entonces

$$Y(\alpha v + \beta v') = \alpha Y(v) + \beta Y(v')$$

El axioma de linealidad es de alguna forma el menos natural. Una justificación posible es la siguiente. Supóngase que $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Entonces podríamos contemplar el juego $\alpha v + \beta v'$ como el juego compuesto donde se juega v con probabilidad α y v' con probabilidad β. No es entonces forzado pensar que para cada jugador i el valor del juego compuesto es la utilidad esperada $\alpha Y_i(v) + \beta Y_i(v')$. Por supuesto, en todo este párrafo estamos suponiendo la validez de los axiomas de la utilidad esperada.

Es fácil demostrar apelando a propiedades simples de álgebra lineal que existe a lo sumo una solución que satisfaga los axiomas I-IV. La cuestión es, por tanto: ¿Existe al menos una? Veamos como la respuesta es positiva. Sea R una ordenación del conjunto de jugadores N. El número de ordenaciones posibles es $n!$ donde n es la cardinalidad de N. Para cada R e i podemos denotar por $R_i \subset N$ el conjunto de los jugadores que preceden a i en la ordenación R (posiblemente $R_i = \phi$). La contribución marginal de i en la ordenación R es $v(R_i \cup \{i\}) - v(R_i)$. Obviamente $\sum_{i \in N} (v(R_i \cup \{i\}) - v(R_i)) = v(N)$ para todo R (como de costumbre ponemos $v(\phi) = 0$). Supongamos que las distintas ordenaciones son igualmente probables. Entonces la utilidad esperada del jugador i es:

$$Y_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_R (v(R_i \cup \{i\}) - v(R_i))$$

La notación ya sugiere lo que es fácil de verificar: que la solución $Y(v)$ así definida satisface los cuatro axiomas. Esa es, pues, la valoración de Shapley. Será instructivo comparar la valoración de Shapley con el núcleo.

Ejemplo 5 (continuación): Recordemos que $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(12) = 0$, $v(13) = v(23) = 1$, $v(123) = 1$. El único punto en el núcleo es $(0, 0, 1)$, que como solución arbitral aparece excesivamente sesgada a favor del tercer jugador (es decir, del poseedor del guante izquierdo). Al fin y al cabo dos guantes derechos son inútiles, pero uno es tan útil como un guante izquierdo. La valoración de Shapley para este ejemplo será $Y_3 = \frac{1}{6}v(13) + \frac{1}{6}v(23) + \frac{1}{3}v(123) = \frac{2}{3}$ y, por tanto, $Y_1 = Y_2 = \frac{1}{6}$. Es decir, $Y(v) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$. El poseedor del guante izquierdo mantiene su posición privilegiada, pero los dos primeros jugadores no ven su utilidad reducida a cero. El resultado es más equilibrado.

Este ejemplo también nos enseña que la valoración de Shapley no tiene por qué pertenecer al núcleo. Sin embargo, merece la pena mencionar que: i) la valoración de Shapley pertenece al núcleo para una clase importante de juegos llamados juegos convexos, y ii) para economías de mercado como las del ejemplo 3 el principio de Equivalencia es válido: si los miembros del mercado son muy numerosos, las asignaciones de mercancías correspondientes a la valoración de Shapley y el equilibrio competitivo son muy semejantes (para una discusión de este notable teorema véase Aumann, 1975).

11. Implementaciones no-cooperativas de la valoración de Shapley*

Tomemos el caso trivial donde $N = \{1, 2\}$. Entonces la valoración de Shapley:

$$Y_1(v) = \frac{1}{2}v(1) + \frac{1}{2}(v(12) - v(2)) = v(1) + \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2))$$

$$Y_2(v) = \frac{1}{2}v(2) + \frac{1}{2}(v(12) - v(2)) = v(2) + \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2))$$

Es decir, cada jugador recibe lo que obtendría individualmente y luego se distribuyen a medias los beneficios (nos limitaremos al caso superaditivo). Consideremos ahora el siguiente mecanismo secuencial. Con igual probabilidad entre los dos jugadores se elige a uno de ellos, que llamaremos el agente proponente. Este propondrá al otro agente una división de $v(12)$. El segundo agente podrá aceptarla o rechazarla. Si la acepta esa será la división. Si la rechaza cada uno recibirá lo que obtendrían individualmente.

Este juego posee muchos equilibrios no cooperativos. Pero sólo uno de ellos puede obtenerse por el procedimiento evidente de recursión hacia atrás

* Para el material de esta sección me he beneficiado de comentarios de O. Hart y de S. Hart.

(en la jerga relevante: todos los demás son equilibrios imperfectos). A saber, si el jugador 1 es el proponente entonces la propuesta será $(v(12) - v(2), v(2))$ y ésta será aceptada. Si el proponente es el segundo jugador, entonces la propuesta será $(v(1), v(12) - v(1))$ y ésta será aceptada. En términos de utilidad esperada los jugadores 1 y 2 recibirán:

$$\frac{1}{2}v(1) + \frac{1}{2}(v(12) - v(2)) \text{ y } \frac{1}{2}v(2) + \frac{1}{2}(v(12) - v(2))$$

respectivamente. Pero ésta es precisamente la valoración Shapley.

Todo lo anterior es inmediato y nos plantea, naturalmente, la siguiente pregunta: ¿Qué mecanismos análogos al anterior nos permitirían implementar la valoración de Shapley en el caso general de N jugadores? A continuación presentaré dos de ellos. No daré, sin embargo, las demostraciones, aunque son simples. Basta combinar un poco de inducción con la verificación de cada uno de los axiomas.

El primer mecanismo procede de la siguiente manera. Con igual probabilidad entre los N jugadores se elige a un proponente. Este propone una imputación al resto de los jugadores. Estos aceptan o rechazan (en un orden preestablecido). Si todos aceptan, la imputación se implementa. Si no hay unanimidad al proponente se le asigna lo que pueda obtener individualmente (es decir, $v(i)$) y el proceso empieza otra vez entre los restantes jugadores (que ahora se repartirán $v(N/\{i\})$. Excepto por la aleatoriedad en elegir un proponente éste es un juego de información perfecta. Hay un solo equilibrio que se obtenga por inducción hacia atrás (en la jerga: un solo equilibrio perfecto. De hecho es más que eso puesto que no hay movimientos simultáneos de jugadores), y si el juego es superaditivo entonces: i) en el equilibrio, la propuesta del primer proponente será siempre aceptada (o sea que efectivamente el juego sólo tendrá un estadio) y ii) las utilidades esperadas de los distintos jugadores igualan a la valoración de Shapley.

El segundo mecanismo (que se asemeja, pero no es idéntico a uno recientemente estudiado por F. Gul, 1986) es ligeramente más complejo. Su característica es que todas las negociaciones ocurren solamente entre pares de jugadores. Se empieza por elegir, con igual probabilidad entre todos los jugadores a un proponente. Sea éste el jugador i. A continuación, y con igual probabilidad entre los restantes jugadores, se elige a un destinatario. Sea éste el jugador $j \neq i$. El proponente ofrece al destinatario una cantidad de utilidad c. Si el destinatario la rechaza el proponente recibe $v(i)$ y es eliminado del juego, es decir, el proceso vuelve a empezar entre los restantes $N/\{i\}$ jugadores. Si el destinatario acepta, entonces éste abandona el juego con la cantidad c, que le es abonada por i, y el proceso vuelve a empezar entre los restantes $N/\{j\}$ jugadores con una cualificación muy importante. En su interacción con los jugadores de $N/\{j, i\}$ es como si i ostentase la representación conjunta de $\{i, j\}$. Mas precisamente, el juego v' entre los jugadores $N/\{j\}$ es el siguiente: si $S \subset N/\{j\}$ pero $i \notin S$ entonces $v'(S) = v(S)$; por el contrario, si $i \in S \subset N/\{j\}$ entonces $v'(S) = v(S \cup \{j\})$. Otra vez habrá un único equilibrio que se obtenga por inducción hacia atrás y si el juego es superaditivio entonces: i) en el equilibrio las propuestas no son nunca rechazadas y ii) las utilidades esperadas de los distintos jugadores igualan a la valoración de Shapley.

12. Aplicaciones

Las aplicaciones económicas de la valoración de Shapley han sido múltiples y no es cosa de revisarlas aquí.

Un área que se ha demostrado muy receptiva a la valoración de Shapley es el de la asignación de costes (véase Young, 1985, o Bosch y Escribano, 1989 (capítulo VII), para una aplicación española), es decir, a problemas como los ilustrados en el ejemplo 4. En un cierto sentido esto encierra una paradoja porque el problema de la asignación de los costes conjuntos tiene, en principio, una solución perfectamente bien estudiada en el contexto de la Economía del Bienestar. En efecto, la solución óptima se caracteriza por la asignación a cada proyecto de su coste marginal y por la igualación de éste al beneficio marginal. Si esta solución es inaceptable porque el coste asignado no sea igual al total (excepto en condiciones muy particulares de rendimientos constantes los precios de eficiencia generan beneficios o pérdidas), podemos apelar a la teoría de la segunda preferencia y recurrir a la bien conocida regla de Ramsey (ésta nos dice que los costes totales deben distribuirse entre los distintos proyectos en forma proporcional al grado de rigidez de su demanda. Por supuesto esto es una descripción imprecisa). Lo que probablemente explica el éxito de la valoración de Shapley es que, en contraste a los principios de la primera o la segunda preferencia, la asignación de costes a la Shapley sólo utiliza la estructura de costes y no precisa información alguna sobre la demanda. Mientras que desde un punto de vista de optimalidad la demanda debería tenerse en cuenta no hay duda que en la práctica puede resultar difícil y engorroso. Así, considérese el ejemplo preferido de los académicos. ¿Cómo distribuir entre distintas instituciones académicas el coste conjunto de una gira de conferencias? La valoración de Shapley ofrece una regla sencilla, razonable y neutra. En cambio, el enfoque de optimalidad requeriría, y utilizaría, una estimación del beneficio que la conferencia reporta a las distintas instituciones. ¡Casi nada!

Otro campo donde abundan las aplicaciones de la valoración de Shapley es en ciencia política. Para un ejemplo en un contexto familiar, véase Carreras y Owen (1988).

13. Sobre la forma característica, otra vez

En esta breve sección quisiera recoger algún comentario sobre un punto al que normalmente no se presta la atención necesaria. Y es que la teoría subyacente a la generación de la función característica y a los distintos conceptos de solución no son enteramente separables. Dicho de otra forma, el análisis de una situación concreta desde el punto de vista del núcleo puede muy bien precisar una formalización por medio de una forma característica distinta a la que recurriríamos en caso de un análisis desde el punto de vista de la valoración de Shapley.

Sobre la generación de la forma característica en el marco de la teoría del núcleo ya se ha hablado. Sobre la misma cuestión en el marco de la valoración de Shapley sólo añadirá unas palabras no muy precisas. A la hora de definir $V(S)$ desde la perspectiva de la valoración de Shapley debemos realizar el siguiente experimento mental: «¿Cuál sería la utilidad total de la coalición S si su complemento $N \backslash S$ no existiese, es decir, si S fuese la totalidad de la población de jugadores?» A veces esta pregunta no tendrá una respuesta muy clara (o incluso carecerá de sentido), pero cuando la tenga nos dará una buena orientación sobre el valor que $V(S)$ debe tener. Obsérvese que el experimento mental paralelo para el núcleo es distinto. («¿Qué debemos suponer sobre la actuación de $N \backslash S$ si la coalición S se separa?») Este último es mucho más estratégico que el primero lo cual se corresponde bien con la distinta naturaleza de los dos conceptos de solución. La naturalidad de las aplicaciones de la valoración de Shapley a problemas de asignación de costes o el hecho de que aquélla se aplica indistintamente a juegos superaditivos o no (lo que refleja que la necesidad de repartir $V(N)$ entre los N jugadores es un dato del problema. La posibilidad de, por ejemplo, dividir N en dos subgrupos no se plantea. ¿Por qué? Presumiblemente porque esta posibilidad formal carece de significado real), son evidencias adicionales en favor del experimento mental propuesto.

Discutamos un ejemplo:

Ejemplo 8: Consideremos una variante del ejemplo 6. Tenemos tres oligopolistas à la Cournot $N = \{1, 2, 3\}$ en un mercado con función inversa de demanda $p = 1 - (a_1 + a_2 + a_3)$. Todas las empresas tienen costes marginales nulos. Pero ahora la empresa 3 tiene un límite de capacidad $\alpha = \frac{3}{4}$. Si definimos la forma característica como en la sección 7 tendremos $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(13) = v(23) = 0$, $v(12) = \frac{1}{64}$, $v(123) = \frac{1}{4}$ lo cual nos dará una valoración de Shapley $Y(v) = \frac{1}{24}\left(2 + \frac{1}{16}, 2 + \frac{1}{16}, 2 - \frac{1}{8}\right)$. Por el contrario, si apeláramos al experimento mental sugerido en esta sección tendríamos $v'(1) = v'(2) = v'(3) =$ $= v'(12) = v'(13) = v'(23) = v'(123) = \frac{1}{4}$ y, por tanto, $Y(v') = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$. ¿Cuál de las dos soluciones es más razonable? A primera vista, parece que $Y(v)$ refleja que la función de coste de la empresa 3 es más estricta. Aun así creemos que $Y(v')$ es una solución más lógica. Al fin y al cabo el límite de capacidad de la empresa 3 está más allá de la producción de una sola empresa.

Referencias

AUMANN, R. (1975): «Values of markets with a continuum of players», *Econometrica*, 43, 611-46.

AUMANN, R. (1987): «Game theory», en *The New Palgrave*, vol. II, J. Eatwell, M. Milgate y P. Newwman, editores, MacMillan, Londres.

AUMANN, R., y MARSHLER, M. (1964): «The Bargaining Set for Cooperative Games», en *Advances in Game Theory*, M. Dresger, L. S. Shapley y A. W. Tucker (editores), Princeton University Press, Princeton, N. J., 443-447.

BAUMOL, W.; PANZAR, J., y WILLIG, R. (1982): *Contestable Markets and the Theory of Industrial Structure*, Harcourt, Brace, Javanovich, San Diego, CA.

BOSCH, A., y ESCRIBANO, C. (1989): artículo en este número de *Cuadernos Económicos de ICE.*

CARRERAS, F., y OWEN, G. (1988): «Evaluation of the Catalonian Parlament», 1980-84, en *Mathematical Social Sciences*, 15, 87-92.

DEBREU, G., y SCARF, H. (1973): «A Limit Theoren on the Core of an Economy», *International Economic Review*, 4(3), 235-46.

EDGEWORTH, F. Y. (1881): *Mathematical Psychics*, Kegan, Londres.

GILLIES, D. B. (1953): «Some theorems on N-Person Games», Tesis doctoral, Universidad de Princeton.

GUL, F. (1986): «Bargaining foundations of Shapley Value», capítulo 1 de Tesis doctoral, Universidad de Princeton. Aparecerá en *Econometrica*.

HILDENBRAND, W., y KIRMAN, A. (1988): *Equilibrium analisis* (segunda edición). Hay versión castellana en la primera edición en Antoni Bosch, editor, Barcelona.

LUCE, D., y RAIFFA, H. (1957): *Games and Decisions*, Wiley, Nueva York.

MAS-COLELL, A. (1987): «Cooperative equilibrium», en *The New Palgrave*, vol. I, J. Eatwell, M. Milgate y P. Newoman, editores, McMillan, Londres.

MOULIN, H. (1986): *Game Theory for the Social Sciences* (segunda edición), New York University Press, Nueva York.

VON NEUMANN, y MORGENSTERN, O. (1947): *Theory of Games and Economic Behavior* (segunda edición), Princenton, Princenton University Press.

OWEN, G. (1982): *Ganme Theory* (segunda edición), New York Academic Press.

SHAPLEY, L. (1953): «A Value for N-Person Games», en *Contributions to the Theory of Games II*, H. W. Karlin, A. W. Tucker, editores, Princeton, Princeton University Press.

SHAPLEY, L., y SHUBIK, M. (1969): «On the Core of an Economic System with Externalities», *American Economic Review*, 59, 678-84.

SHUBIK, M. (1983): *Game Theory in the Social Sciences*, MIT Press, Cambridge, MA.

YOUNG, P. (1985): «Cost Allocation», en *Fair Allocation*, P. Young, editor.

AMS short course Lecture Notes, vol. 33, The American Mathematic Society: Providence, Rodhe Island.